3. Factorisation LU

Sections 2.6 et 2.7

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v1)

Plan

1. Élimination = Factorisation (= Décomposition)

2. Transposées et permutations

1. Élimination = Factorisation (= Décomposition)

2. Transposées et permutations

Factorisation LU (1/2)

Étant donné un SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, avec $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ et $b \in \mathbb{R}^n$, l'élimination **sans permutation** permet d'écrire

$$A = LU$$

où

- U est la matrice triangulaire supérieure obtenue par élimination
- $L = (E_p E_{p-1} \cdots E_1)^{-1} = E_1^{-1} \cdots E_{p-1}^{-1} E_p^{-1}$ est le produit des inverses des matrices d'élimination. Cette matrice est triangulaire inférieure

Ceci est **une** *factorisation* (ou *décomposition*) LU de la matrice A

Factorisation LU (2/2)

On remarque que :

- L est triangulaire inférieure
- L possède des 1 sur sa diagonale
- Chaque multiplicateur ℓ_{ij} est à sa position (i, j) dans L
- U est triangulaire supérieure
- Les n pivots sont sur la diagonale de U

Exemple 1

Effectuer la décomposition LU de la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Factorisation LDU

Pour une matrice de taille 3×3, si d_1, d_2, d_3 sont les pivots sur la diagonale de U dans la factorisation LU et

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix}$$

alors en divisant les lignes de U par les pivots on obtient

$$\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} d_1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & d_2 & u_{23} \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{bmatrix} & \times & \begin{bmatrix} 1 & u_{12}/d_1 & u_{13}/d_1 \\ 0 & 1 & u_{23}/d_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \\ U & = & D & \times & U' \end{array}$$

Ainsi, $A = LU = LDU'$. Ceci est la factorisation LDU de A, qui est aussi valide pour une matrice de taille $n \times n$

Cas particuliers

- Lorsqu'une ligne de A débute avec des zéros, il en est de même pour cette ligne de L
- Lorsqu'une colonne de A débute avec des zéros, il en est de même pour cette colonne de U

Résolution d'un SÉL

Un système carré = deux systèmes triangulaires

Pour résoudre un SÉL carré $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

1. Factoriser $A = LU$
2. Résoudre $LU\mathbf{x} = \mathbf{b}$ via deux systèmes triangulaires :
   - 2.1 Résoudre $L\mathbf{c} = \mathbf{b}$ par descente triangulaire
   - 2.2 Résoudre $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ par remontée triangulaire

La solution au SÉL est le $\mathbf{x}$ trouvé à l'étape 2.2

Exemple 2

En utilisant la décomposition LU, résoudre le système 3×3 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & - & 3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 10 \end{array}\right.$$

Complexité

- L'élimination sur A nécessite environ $n^3/3$ multiplications et $n^3/3$ soustractions : Complexité de $\mathcal{O}(n^3)$
- La résolution pour chaque membre de droite nécessite n^2 multiplications et n^2 soustractions : Complexité de $\mathcal{O}(n^2)$
- Résoudre un SÉL se fait donc en $\mathcal{O}(n^3)$

1. Élimination = Factorisation (= Décomposition)

2. Transposées et permutations

Transposée d'une matrice

Définition

Si A est une matrice de taille $m \times n$ alors sa *transposée* est la matrice $A^\top$ de taille $n \times m$ obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de A :

$A^\top(i,j) = A(j,i)$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ et $j = 1, 2, \ldots, m$

Propriétés des transposées

1. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$
2. $(AB)^\top = B^\top A^\top$
3. Si A est inversible alors $A^\top$ l'est aussi et $\left(A^\top\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\top$
4. $\left(A^\top\right)^\top = A$
5. La transposée d'une triangulaire inférieure (supérieure) est triangulaire supérieure (inférieure)

Transposée et produit scalaire

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ des vecteurs de taille n :

- $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ est le *produit scalaire* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est un réel)
- $\mathbf{y}\mathbf{x}^\top$ est le *produit extérieur* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est une matrice de taille $n \times n$)
- $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$

Si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$:

- $A^\top$ est la matrice telle que $(A\mathbf{x})^\top \mathbf{y} = \mathbf{x}^\top (A^\top \mathbf{y})$, ce qui peut aussi se noter $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot A^\top \mathbf{y}$

Exemple 3 : Illustrer avec $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, et $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$

Matrices symétriques

- Une matrice **carrée** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est *symétrique* si $A^\top = A$
- Si A est symétrique, $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$
- Toute matrice diagonale est symétrique
- Si A est symétrique et inversible alors A^{-1} est aussi symétrique
- Si R est une matrice de taille $m \times n$ alors $RR^\top \in \mathbb{R}^{m\times m}$ et $R^\top R \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sont des matrices carrées symétriques

Factorisation $LDL^\top$

- Si A est **symétrique** et se factorise en $A = LDU$ alors $U = L^\top$ et

$$A = A^\top = (LDU)^\top = U^\top DL^\top = LDL^\top$$

Ceci est la factorisation $LDL^\top$ de A

- **Exemple 4 :** Illustrer sur $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$

Matrices de permutation

Une *matrice de permutation* est une matrice P obtenue en interchangeant des lignes et des colonnes de la matrice identité I

- Il y a $n!$ matrices de permutation de taille $n \times n$
- Le produit PA a pour effet de permuter les lignes de A
- Toute matrice de permutation est le produit de matrices de permutation *simples* P_{ij} qui chacune interchange les lignes i et j
- Si P est une matrice de permutation alors P^{-1} existe et est aussi une matrice de permutation. Elle est donnée par

$$P^{-1} = P^{\top}$$

- De plus, pour une matrice de permutation simple, on a

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}^{\top} = P_{ij}$$

Factorisation $PA = LU$

- Quand A^{-1} existe, si un 0 apparaît à la place d'un pivot alors on peut obtenir un pivot non-nul en interchangeant deux lignes à l'aide d'une matrice de permutation
- L'ensemble des permutations nécessaires à l'élimination peut être rassemblé en **une** matrice de permutation P
- Il existe donc une matrice de permutation P telle que la procédure d'élimination fonctionne pour la matrice PA

On obtient la factorisation suivante de A :

$$PA = LU$$

Exemple 5

Donner deux décompositions $PA = LU$ pour $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$