

3. Noyau et rang

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-16

v0

Plan

Noyau et formes échelonnées

- Définitions

- Matrice échelonnée

- Matrice échelonnée réduite

Rang et matrice noyau

- Définition

- Matrice noyau

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ 6.1.1 : Noyau d'une matrice
- ▶ 2.1.2 : Formes échelonnée et échelonnée réduite
- ▶ 6.1.5 : Rang d'une matrice
- ▶ 8.3 : Déterminer le noyau d'une matrice

Noyau et formes échelonnées

Définitions

Matrice échelonnée

Matrice échelonnée réduite

Rang et matrice noyau

Définition

Matrice noyau

Le noyau de $\mathbf{A}$

Le *noyau* d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est l'ensemble des vecteurs qui sont solutions du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. On le note

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

- ▶ $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est un *système homogène*
- ▶ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est un *système non homogène*
- ▶ $\mathbf{0} \in \text{Ker}(\mathbf{A})$
- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$ si et seulement si les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes

Motivation : Le noyau donne la solution complète

- Soit $\mathbf{x}$ une solution du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Si $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ est dans le noyau de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ est une autre solution du SÉL :

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{Ay} = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

- Trouver le noyau de $\mathbf{A}$ permet donc d'exprimer toutes les solutions du SÉL, à partir d'une *solution particulière*

Solutions spéciales

- ▶ Le noyau contient soit un unique vecteur ($\mathbf{x} = \mathbf{0}$), soit une infinité de vecteurs
- ▶ Le noyau est constitué de la solution triviale $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ et de toutes les combinaisons de *solutions spéciales*
- ▶ Les solutions spéciales sont construites à partir d'un algorithme basé sur l'élimination de $\mathbf{A}$

Matrice échelonnée

- ▶ Une matrice est *échelonnée* si le premier élément non nul d'une ligne est toujours situé dans une colonne à droite du premier élément non nul de la ligne précédente
- ▶ **Exemple** : x_1, x_4, x_5 sont les *variables pivot* et x_2, x_3, x_6 sont les *variables libres* :

$$\mathbf{U} = \begin{array}{cccccc}
 & x_1 & & x_4 & x_5 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\
 \left[\begin{array}{cccccc}
 p_1 & * & * & * & * & * \\
 0 & 0 & 0 & p_2 & * & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & p_3 & * \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{array} \right] & \in \mathbb{R}^{4 \times 6} \\
 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\
 & x_2 & x_3 & & x_6 &
 \end{array}$$

Échelonnement

Pour obtenir une matrice échelonnée à partir d'une matrice quelconque :

1. Appliquer la procédure d'élimination si un pivot est disponible
2. Si on a un zéro à la place d'un pivot mais il existe un élément non nul dans la même colonne, permuter les lignes pour obtenir un pivot
3. Si aucun pivot n'est disponible dans une colonne, passer à la prochaine colonne pour appliquer la procédure d'élimination

Échelonnement

Pour obtenir une matrice échelonnée à partir d'une matrice quelconque :

1. Appliquer la procédure d'élimination si un pivot est disponible
 2. Si on a un zéro à la place d'un pivot mais il existe un élément non nul dans la même colonne, permuter les lignes pour obtenir un pivot
 3. Si aucun pivot n'est disponible dans une colonne, passer à la prochaine colonne pour appliquer la procédure d'élimination
- ▶ Les colonnes contenant un pivot correspondent aux *variables pivot*;
 - ▶ Les colonnes ne contenant pas de pivot correspondent aux *variables libres*;
 - ▶ On dit aussi *colonnes pivot* et *colonnes libres*

Résolution de $Ax = 0$ (solutions spéciales)

1. Obtenir U une matrice échelonnée à partir de A . Résoudre $Ax = 0$ revient à résoudre $Ux = 0$; Ou encore $\text{Ker}(A) = \text{Ker}(U)$
2. Poser la première variable libre égale à 1 et les autres variables libres égales à 0
3. Résoudre le système triangulaire ainsi obtenu pour les variables pivot. Ceci donne la première *solution spéciale*
4. Répéter les étapes 2. et 3. pour chacune des autres variables libres. Ceci donne les *solutions spéciales* du SÉL

Cet algorithme donne donc autant de solutions spéciales que de colonnes libres

Expression du noyau

Si

- ▶ $i_1, i_2, \dots, i_p$ sont les indices des p variables libres
- ▶ $\mathbf{s}_{i_1}, \mathbf{s}_{i_2}, \dots, \mathbf{s}_{i_p}$ sont les p solutions spéciales
- ▶ $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}$ sont les p variables libres

Alors

- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Vect}(\mathbf{s}_{i_1}, \mathbf{s}_{i_2}, \dots, \mathbf{s}_{i_p})$
- ▶ $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ si

$$\mathbf{x} = x_{i_1} \mathbf{s}_{i_1} + x_{i_2} \mathbf{s}_{i_2} + \dots + x_{i_p} \mathbf{s}_{i_p}$$

Exercice 1

Exprimer le noyau de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

avec la matrice échelonnée $\mathbf{U}$

Remarques

- ▶ Si $\mathbf{A}$ est de taille $m \times n$ alors elle possède au plus m pivots : il ne peut y avoir plus de pivots que de lignes
- ▶ Le nombre de pivots ne peut pas non plus dépasser le nombre de colonnes
- ▶ Si $m < n$ (plus de colonnes que de lignes) alors il y a au moins $n - m > 0$ variables libres. Dans ce cas, le noyau contient des vecteurs non nuls : $\text{Ker}(\mathbf{A}) \neq \{0\}$
- ▶ Le nombre de pivots est appelé le *rang* de $\mathbf{A}$

Matrice échelonnée réduite

- ▶ Une matrice $\mathbf{R}$ est *échelonnée réduite* si
 1. Elle est échelonnée
 2. Chaque premier élément non nul d'une ligne est égal à 1
 3. Ces 1 sont les seuls éléments non nuls de leur colonne
- ▶ Exemple :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 6}$$

- ▶ On obtient cette forme en poursuivant l'élimination de façon à obtenir des zéros au-dessus des pivots, puis en divisant chaque ligne par son pivot (si elle en contient un)¹

1. c'est l'algorithme de réduction de Gauss-Jordan

Remarques

- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{U}) = \text{Ker}(\mathbf{R})$
- ▶ Obtenir les solutions spéciales à partir de $\mathbf{R}$ est plus facile
- ▶ Noms exacts des procédés :
 - ▶ $\mathbf{A} \sim \mathbf{U}$: Procédé d'échelonnement, par l'algorithme de Gauss
 - ▶ $\mathbf{A} \sim \mathbf{R}$: Procédé de réduction, par l'algorithme de Gauss-Jordan

Exercice 2

Trouver le noyau de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix}$$

avec la matrice échelonnée réduite $\mathbf{R}$

Liens avec l'indépendance linéaire

- ▶ Les colonnes d'une matrice $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes si la seule solution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ est $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- ▶ Autrement dit, les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes si et seulement si $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
- ▶ Tout vecteur non nul du noyau fournit une relation linéaire entre les colonnes de $\mathbf{A}$
- ▶ **Exercice 3 :** Soit $\mathbf{A} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \mathbf{c}_3 \ \mathbf{c}_4]$ telle que $\mathbf{c}_3 = \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2$. Donner un vecteur non nul du noyau de $\mathbf{A}$

Exercice 4

Indiquer si les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} & \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{-8} & -8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -4 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 + L_2/4 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2/2}} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & 3 \\ 0 & \boxed{-8} & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U} \end{aligned}$$

il n'y a aucune colonne libre, donc $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{0\}$ et les colonnes de $\mathbf{A}$ sont indépendantes

Noyau et formes échelonnées

Définitions

Matrice échelonnée

Matrice échelonnée réduite

Rang et matrice noyau

Définition

Matrice noyau

Rang d'une matrice

Idée : une matrice de taille $m \times n$, une fois réduite, peut contenir des lignes nulles qui correspondent à des équations redondantes

La “vraie” taille d'une matrice est son *rang*

Définition

Le *rang* d'une matrice $\mathbf{A}$ est le nombre de pivots de la matrice. Il est noté $\text{rg}(\mathbf{A})$.

Remarque :

Si $\mathbf{A}$ est de taille $m \times n$ alors :

$$\begin{aligned} \text{rg}(\mathbf{A}) &\leq \text{nombre de lignes de } \mathbf{A} &&= m \\ \text{rg}(\mathbf{A}) &\leq \text{nombre de colonnes de } \mathbf{A} &&= n \end{aligned}$$

Liens avec l'indépendance linéaire

- ▶ Les colonnes de la matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ sont linéairement indépendantes si et seulement si $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$

Conséquence importante :

- ▶ Si $n > m$ alors n vecteurs de $\mathbb{R}^m$ sont nécessairement dépendants

Matrice noyau

- ▶ Si $r = \text{rg}(\mathbf{A})$, on a les $n - r$ solutions spéciales $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{n-r}$
- ▶ La *matrice noyau* correspondante est

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_1 & \mathbf{s}_2 & \cdots & \mathbf{s}_{n-r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$$

qui satisfait $\mathbf{AN} = \mathbf{RN} = \mathbf{O}_{m,n-r}$

- ▶ Si on permute les colonnes de $\mathbf{R}$ pour avoir les r premières colonnes comme colonnes pivot, on a

$$\mathbf{R}' = \mathbf{RP} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{O}_{m-r,r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

($\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice de permutation)

Obtention rapide de $\mathbf{N}$ depuis $\mathbf{R}$

Avec

$$\mathbf{R}' = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_r & \mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \\ \hline \mathbf{O}_{m-r,r} & \mathbf{O}_{m-r,n-r} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

on cherche $\mathbf{N}' \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ telle que

$$\mathbf{R}'\mathbf{N}' = \mathbf{O}_{m,n-r}$$

qui est

$$\mathbf{N}' = \left[\begin{array}{c} -\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)} \\ \mathbf{I}_{n-r} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$$

puis on “dé-permute”

$$\mathbf{N} = \mathbf{P}\mathbf{N}' \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$$

Matrice noyau $\neq$ Noyau

- ▶ **Attention** : Matrice noyau $\mathbf{N} \neq \text{Noyau Ker}(\mathbf{A})$
(matrice $\neq$ s.e.v.)
- ▶ Les colonnes de la matrice noyau sont les $n - r$ solutions spéciales qui génèrent le noyau
- ▶ Résumé de la méthode rapide d'obtention de $\mathbf{N}$:

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}' \rightarrow \mathbf{N}' \rightarrow \mathbf{N}$$

Exercice 5 (avec permutation des colonnes de R)

Exprimer le noyau de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 10 \\ 3 & 3 & 10 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$

$$\mathbf{A} \xrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 - 3L_1 \\ L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 - 2L_1}]{\substack{\boxed{1} \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ 0 \quad 0 \quad \boxed{4} \quad 4 \\ 0 \quad 0 \quad 4 \quad 4}} \xrightarrow{L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 - L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{U}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{4}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{R}$$

$$\rightarrow \mathbf{R}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{N}' = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{N} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les solutions spéciales sont $\mathbf{s}_2 = (-1, 1, 0, 0)$ et $\mathbf{s}_4 = (-1, 0, -1, 1)$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \text{Ker}(\mathbf{A}) \text{ si } \mathbf{x} = x_2 \mathbf{s}_2 + x_4 \mathbf{s}_4 = x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ -x_4 \\ x_4 \end{bmatrix}$$