

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 3 : Noyau et rang

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 2.1 vrai ou faux ?(★)

1. Toute matrice diagonale est échelonnée.
2. Toute matrice diagonale échelonnée est réduite.
3. Une matrice carrée échelonnée a ses pivots sur sa diagonale.
4. Une matrice échelonnée ne peut pas avoir des pivots sous sa diagonale.
5. Pour la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$, est-il possible que l'algorithme d'élimination de Gauss produise deux formes échelonnées différentes ?
6. Soit $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ trois matrices telles que $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ et $\mathbf{B} \sim \mathbf{C}$, alors $\mathbf{A} \sim \mathbf{C}$.
7. Une forme échelonnée de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ est aussi sa forme échelonnée réduite.
8. Une matrice carrée échelonnée réduite est nécessairement inversible.
9. Une matrice carrée échelonnée réduite qui possède autant de coefficients non nuls que de colonnes est inversible.
10. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ une matrice ligne, alors $\mathbf{A}$ est déjà sous forme échelonnée.
11. Soit $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de permutation, alors $(\mathbf{I}_n + \mathbf{P})(\mathbf{I}_n - \mathbf{P}^\top) + \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}$.

Exercice 2.5 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

1. Échelonner $\mathbf{A}$ en y appliquant l'algorithme d'échelonnement de Gauss de Gauss pour déterminer une forme échelonnée $\mathbf{U}$. Mettre en évidence les pivots utilisés en les encadrant à chaque étape.
2. Réduire $\mathbf{A}$ en y appliquant l'algorithme de réduction de Gauss-Jordan de Gauss-Jordan pour déterminer une forme échelonnée réduite $\mathbf{R}$.
3. Donner le nombre et les valeurs des pivots.

4. Est-ce que l'algorithme d'échelonnement de Gauss aurait pu produire des pivots différents ?
5. $\mathbf{A}$ est-elle inversible ?
6. Donner les matrices d'élimination, de permutation, et de mise à l'échelle par lesquelles $\mathbf{A}$ a été multipliée pour obtenir les matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{R}$.

Exercice 2.6 (★)

On considère la même matrice $\mathbf{A}$ que dans l'exercice 2.5.

1. Donner la matrice $\mathbf{U}$ obtenue en faisant un choix de permutation différent de celui effectué à l'exercice 2.5, lors de la première étape de l'algorithme d'échelonnement de Gauss de Gauss.
2. Identifier les nouveaux pivots et vérifier que leur produit est toujours égal à -15 , comme dans l'exercice 2.5.

Exercice 2.13 (★)

Soient $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$, $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & 3 & 8 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$, $\mathbf{M}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 9 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, $\mathbf{M}_5 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{M}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$. Pour chacune des matrices :

1. Déterminer une forme échelonnée équivalente à la matrice considérée équivalente en appliquant l'algorithme de Gauss.
2. En déduire la forme échelonnée réduite équivalente à la matrice considérée.

Exercice 1.16 structure de la matrice noyau (★)

Soit $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{F} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{N} = \begin{bmatrix} -\mathbf{F} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$ avec r un entier tel que $r \leq \min\{m, n\}$.

1. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, donner les tailles de $\mathbf{F}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, et aussi $\mathbf{B}$ si on veut que le produit $\mathbf{RN}$ soit défini.
2. Exprimer le produit $\mathbf{RN}$.
3. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices identité, et si $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont des matrices nulles, exprimer le produit $\mathbf{RN}$.

Exercice 6.1 hyperplan et noyau (★★)

Soit l'hyperplan $x + 2y - 3z - t = 0$ de $\mathbb{R}^4$. Donner une matrice $\mathbf{A}$ dont le noyau est cet hyperplan. Trouver trois vecteurs linéairement indépendants appartenant à cet hyperplan. Pourquoi n'est-il pas possible d'en trouver quatre ?

Exercice 6.2 vrai ou faux (★★)

Répondez par vrai ou faux en justifiant vos réponses :

1. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ deux matrices de même taille, où $\mathbf{D}$ est inversible. Alors, $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{DA})$.
2. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ deux matrices de même taille, où $\mathbf{D}$ est inversible. Alors, $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{AD})$.

Exercice 6.4 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.5 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}.$$

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.6 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}.$$

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.7 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$.

1. En toute généralité, de quels espaces vectoriels $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.8 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 1}$.

1. En toute généralité, de quels espaces $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$ sont-ils des sous-espaces vectoriels ?
2. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.9 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}.$$

1. Quel est le rang maximal possible de $\mathbf{A}$?
2. Déterminer une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.
3. En déduire la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.16 (★)

1. Déterminer le rang de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

puis la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et vérifier que

$$\dim \text{Im}(\mathbf{A}) + \dim \text{Ker}(\mathbf{A}) = 3.$$

Exercice 6.18 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calculer le rang de $\mathbf{A}$, la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A})$ et vérifier le théorème du rang.

Exercice 6.19 (★)

Soit

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Déterminer le rang de $\mathbf{A}(t)$ et la dimension de $\text{Ker}(\mathbf{A}(t))$ pour tout t , puis vérifier le théorème du rang.

Exercice 6.27 (★)

Soit

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

telle que $\text{rg}(\mathbf{A}) = 2$ et $\mathbf{a}_1 + 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_3 = 0$. Donner une base de $\text{Ker}(\mathbf{A})$.