

4. Systèmes d'équations linéaires, élimination, et matrices inverses

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-28

v0

Plan

Systèmes d'équations linéaires

- Introduction

- Élimination

Matrices inverses

- Définitions et propriétés

- Liens avec les systèmes

- Inversion d'une matrice

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ 2.1 : Principe de l'élimination
- ▶ 8.1 : Introduction aux systèmes d'équations linéaires
- ▶ 2.2 : Algorithmes de Gauss et de Gauss-Jordan
- ▶ 8.2 : Résolution d'un système
- ▶ 1.4 : Matrices inverses
- ▶ 8.5 : Inversion d'une matrice

Il est important d'appliquer à la lettre les algorithmes d'échelonnement de Gauss et de réduction de Gauss-Jordan tels que définis dans la section 2.2 de *alfa*

Systèmes d'équations linéaires

Introduction

Élimination

Matrices inverses

Définitions et propriétés

Liens avec les systèmes

Inversion d'une matrice

Systèmes d'équations linéaires (SÉL)

Un SÉL à m équations et n inconnues s'écrit $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, c'est-à-dire

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n & = & b_m \end{cases}$$

ou encore

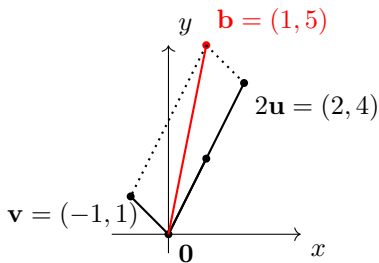
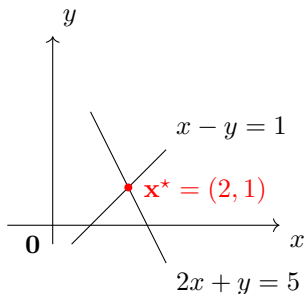
$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Exemple avec $m = n = 2$

Soit le SÉL

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Deux points de vue : *Portrait des lignes* et *portrait des colonnes* :

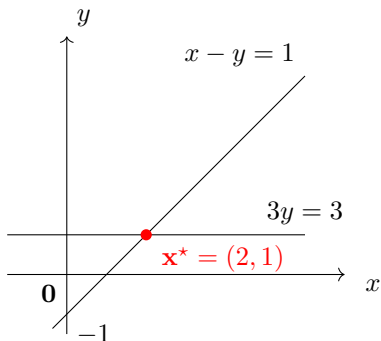
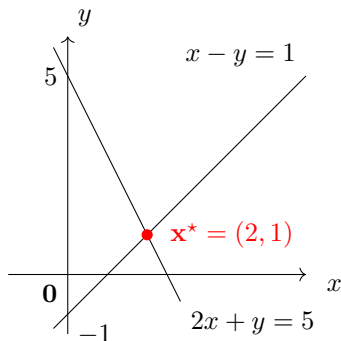


Exemple (suite)

Soit le SÉL

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$$

Élimination :



Principe de l'élimination de Gauss (cas $m = n$)

- ▶ L'objectif de l'élimination est d'obtenir un **système triangulaire supérieur** : On passe de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ à $\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$ avec $\mathbf{U}$ une matrice **triangulaire supérieure** (les coefficients sous la diagonale sont nuls)
- ▶ L'élimination est suivie d'une **remontée triangulaire** qui permet de construire simplement la solution $\mathbf{x}$
- ▶ Le **pivot** p_i est le premier coefficient non nul de la ligne i qui fait l'élimination
- ▶ Le **multiplieur** $\ell_{i,j}$ est le ratio du coefficient $a_{i,j}$ à éliminer sur le pivot (et donc le pivot ne peut être nul)
- ▶ On effectue l'opération $a_{i,j} - \ell_{i,j}p_i$ pour **éliminer** le coefficient $a_{i,j}$

Procédure d'échelonnement de Gauss

Pour résoudre un SÉL :

1. Utiliser la première équation pour générer par élimination des zéros sous le premier pivot :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \ell_{2,1}L_1, L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{3,1}L_1, \text{ etc.}$$

2. Utiliser la nouvelle deuxième équation pour générer par élimination des zéros sous le deuxième pivot :

$$L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{3,2}L_2, L_4 \leftarrow L_4 - \ell_{4,2}L_2, \text{ etc.}$$

3. Continuer ainsi jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire
4. Résoudre par remontée triangulaire le système obtenu à l'étape 3.

Matrice augmentée

- ▶ L'élimination des deux membres du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n'affecte pas le vecteur des variables $\mathbf{x}$. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire de l'inclure dans les calculs
- ▶ On travaille plutôt avec la *matrice augmentée*¹ du système :

$$[\mathbf{A}|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array} \right]$$

1. *matrice "complète" ou système "complet"* dans le manuel

Exercice 1

Résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 8 \\ -2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 10 \end{cases}$$

“Échecs” de l'élimination

1. Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = c$ où $c \neq 0$
→ le SÉL ne possède pas de solution
2. Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = 0$
→ le SÉL peut posséder une infinité de solutions
3. Le SÉL a un premier *candidat pivot* qui est nul
→ la solution est de permuter les lignes

En tout, il y a donc trois possibilités : Aucune solution, solution unique, ou infinité de solutions

Remarques

- ▶ Pour un SÉL à n équations et n inconnues (système carré, matrice $\mathbf{A}$ carrée) :
 1. Cette procédure fonctionne si le système triangulaire possède n pivots (non nuls), qui sont situés sur la diagonale
 2. Si le système triangulaire possède n pivots alors on dit que le SÉL est *non singulier*. Sinon, il est *singulier*
- ▶ De façon plus générale ($\mathbf{A}$ carrée ou rectangulaire) : Le système est dit *réalisable* (ou *compatible*) s'il possède au moins une solution

Existence d'une solution

Les énoncés suivants sont équivalents :

- a $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ est réalisable pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$
- b Tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est une combinaison des colonnes de $\mathbf{A}$
- c Les colonnes de $\mathbf{A}$ engendrent $\mathbb{R}^m$
- d Chaque ligne de $\mathbf{U}$ contient un pivot

Systèmes d'équations linéaires

Introduction

Élimination

Matrices inverses

Définitions et propriétés

Liens avec les systèmes

Inversion d'une matrice

Matrices inverses : Rappel

Définition

Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est *inversible*, ou *non singulière*, s'il existe une matrice $\mathbf{A}^{-1}$ telle que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Théorème

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices inversibles de même taille alors $\mathbf{AB}$ est inversible et

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Caractérisations des matrices inverses

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible si et seulement si

1. Il existe $\mathbf{B}$ telle que $\mathbf{AB} = \mathbf{I}$ ou $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$
2. Il existe $\mathbf{B}$ inversible telle que $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A}$
3. $\mathbf{A}^\top$ est inversible
4. Le déterminant de $\mathbf{A}$ est différent de zéro : $\det(\mathbf{A}) \neq 0$
5. Les **valeurs propres** de $\mathbf{A}$ sont non nulles : $\lambda \neq 0$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(\mathbf{A})$
6. Les colonnes et les lignes de $\mathbf{A}$ sont linéairement indépendantes
7. Un algorithme d'élimination permet d'obtenir n pivots
8. $\mathbf{A}$ peut **se réduire** à $\mathbf{I}$: $\mathbf{A} \sim \mathbf{I}$
9. $\mathbf{A}$ est de **plein rang**
10. Le noyau de $\mathbf{A}$ ne contient que le vecteur nul : $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$
11. L'image de $\mathbf{A}$ remplit tout l'espace : $\text{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$
12. L'**application linéaire** associée à $\mathbf{A}$ est bijective
13. $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique quel que soit le vecteur $\mathbf{b}$

Matrice inverse 2×2

Si $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $ad - cb \neq 0$, alors $\mathbf{A}^{-1}$ existe et

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$ad - bc$ est le *déterminant* de $\mathbf{A}$

Attention : Cette formule ne fonctionne pas pour des matrices 2×2 par blocs.

Solution d'un SÉL

Si $\mathbf{A}$ est inversible, alors il y a une solution unique du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, qui est donnée par

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Mais en pratique, **il ne faut jamais inverser une matrice pour résoudre un SÉL**. Au lieu, on applique la procédure d'élimination de Gauss, moins coûteuse

Inverser une matrice avec des SÉL

- ▶ On considère les colonnes de la matrice identité

$$\mathbf{I} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n]$$

- ▶ Si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, la résolution de $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_1$ donnera la solution $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{e}_1$ qui est la première colonne de $\mathbf{A}^{-1}$
- ▶ Pour inverser $\mathbf{A}$ au complet, on peut donc résoudre les n SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, chaque résolution donnant une colonne de $\mathbf{A}^{-1}$
- ▶ La procédure de **Gauss-Jordan** vue ci-après résout ces n SÉL en même temps en considérant le système augmenté $[\mathbf{A} \mid \mathbf{I}]$

Procédure de réduction de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse d'une matrice

Pour trouver l'inverse de $\mathbf{A}$:

1. On forme la matrice augmentée $[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}]$
2. On applique la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 en dessous des pivots
3. On applique ensuite la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 au-dessus des pivots
4. On divise chaque ligne de la matrice résultante par la valeur du pivot sur cette ligne (si possible !)
5. On obtient ainsi la matrice augmentée $[\mathbf{I} \quad \mathbf{A}^{-1}]$

Gauss-Jordan (suite)

Remarque : Si on obtient un “pivot nul”², la procédure s’arrête et on en conclut que la matrice n’est pas inversible (ou *singulière*)

2. et donc ce n'est pas un pivot, mais plutôt un candidat pivot.

Exercice 2

Calculer les inverses des matrices suivantes (si possible) :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Exercice 2 (démarche pour A)

$$[A \ I] = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 9 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 + L_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow \tilde{L}_3 - L_2 \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 + L_3/2 \\ L_2 \leftarrow \tilde{L}_2 - L_3/4 \end{matrix} \begin{bmatrix} \boxed{2} & 4 & 0 & 5/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -11/4 & 5/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \tilde{L}_1 - 4L_2 \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 27/2 & -11/2 & 3/2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -11/4 & 5/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & \boxed{4} & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} L_1 \leftarrow \tilde{L}_1/2 \\ L_3 \leftarrow \tilde{L}_3/4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 27/4 & -11/4 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -11/4 & 5/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 1/4 \end{bmatrix} = [I \ A^{-1}]$$

$$A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 27 & -11 & 3 \\ -11 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Les trois pivots identifiés par l'algorithme sont $p_1 = 2$, $p_2 = 1$, et $p_3 = 4$