2. Matrices

Sections 2.4 et 2.5

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v1)

Plan

1. Les règles des opérations matricielles

2. Matrices inverses

Rappel

Une *matrice* de *taille* $m \times n$ est un tableau de nombres arrangés en m lignes et n colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Le nombre a_{ij} est le *coefficient* (ou *élément*) de A situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne, avec $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Il est aussi noté $A(i, j)$

Définition des opérations matricielles

- **Addition :** Si A et B sont des matrices de même taille alors leur *somme* est la matrice $C = A + B$ obtenue en additionnant les éléments correspondants de A et B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ et } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- **Multiplication par un scalaire :** Si $k \in \mathbb{R}$ et A est une matrice alors $C = kA$ est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de A par k :

$$c_{ij} = ka_{ij} \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ et } j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

- **Multiplication :** Si A est une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$ alors leur *produit* est la matrice $C = A \times B = AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$ dont l'élément c_{ij} est égal à

$$(i\text{-ième ligne de } A) \cdot (j\text{-ième colonne de } B)$$

Propriétés des opérations matricielles

Lorsque que les opérations sont possibles, on a

1. $A + B = B + A$ commutativité
2. $k(A + B) = kA + kB$ distributivité
3. $A + (B + C) = (A + B) + C$ associativité
4. $A(B + C) = AB + AC$ distributivité à gauche
5. $(B + C)A = BA + CA$ distributivité à droite
6. $A(BC) = (AB)C$ associativité
7. $A^p = AA \ldots A$ p facteurs
8. $(A^p)(A^q) = A^{p+q}$, $(A^p)^q = A^{pq}$ puissances
9. $IA = AI = A$ élément neutre

Remarque : en général $AB \neq BA$, même lorsque les deux produits existent

Multiplication par blocs

Il est parfois utile d'effectuer la multiplication de matrices par blocs comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} AB &= \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c|c} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ \hline B_{21} & B_{22} & B_{23} \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22} & A_{11}B_{13} + A_{12}B_{23} \\ \hline A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22} & A_{21}B_{13} + A_{22}B_{23} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Multiplication par blocs : Cas particulier

Si on considère que les blocs de A sont ses colonnes et les blocs de B sont ses lignes, alors on obtient :

$$\begin{aligned} AB = & \text{ colonne 1 de } A \times \text{ ligne 1 de } B \\ & + \text{ colonne 2 de } A \times \text{ ligne 2 de } B \\ & + \ldots \end{aligned}$$

ce qui constitue une façon différente de voir la multiplication de deux matrices

Exemple 1 : Multiplier $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ par $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Attention à certains pièges

- $AB = \mathbf{0}$ n'implique pas nécessairement $A = \mathbf{0}$ ou $B = \mathbf{0}$:
  Exemple avec $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
- $AB = B$ avec $B \neq \mathbf{0}$ n'implique pas nécessairement $A = I$:
  Exemple avec $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

1. Les règles des opérations matricielles

2. Matrices inverses

Matrices inverses

Définition

Une matrice carrée A est *inversible* s'il existe une matrice A^{-1} telle que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ où I est la matrice identité

Exercice 3.3.19 : $AB = I$ suffit à démontrer que $B = A^{-1}$

Théorème

Si A et B sont des matrices inversibles de même taille alors AB est inversible et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Matrice inverse 2×2

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $ad - cb \neq 0$, alors A^{-1} existe et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$ad - bc$ est appelé le *déterminant* de A

Inverse d'une matrice d'élimination

Rappel : La matrice d'élimination E_{ij} qui soustrait de la i-ième ligne un multiple ℓ (le multiplicateur) de la j-ième ligne est obtenue en remplaçant par $-\ell$ le 0 en position (i, j) dans la matrice identité I

L'inverse de E_{ij} est obtenu en remplaçant le $-\ell$ par ℓ, à la même position. E_{ij}^{-1} correspond donc à une autre matrice d'élimination, qui permet de revenir à A :

$$E_{ij}^{-1} E_{ij} A = A$$

Élimination par blocs

Si $M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$, alors la matrice d'élimination

$$E = \left[\begin{array}{c|c} I & \mathbf{0} \\ \hline -CA^{-1} & I \end{array}\right]$$

effectue l'élimination par blocs suivante :

$$EM = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline \mathbf{0} & D - CA^{-1}B \end{array}\right]$$

Solution d'un SÉL

Si A est inversible, alors il y a une solution unique au SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ donnée par

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Mais en pratique, **il ne faut jamais inverser une matrice pour résoudre un SÉL**. Au lieu, on applique la procédure d'élimination de Gauss, moins coûteuse

Inverser une matrice avec des SÉL

- On considère les colonnes de la matrice identité

$$I = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n]$$

- Si A^{-1} existe, la résolution de $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$ donnera la solution $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{e}_1$ qui est la première colonne de A^{-1}
- Pour inverser A au complet, on peut donc résoudre les n SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$ pour $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, chaque résolution donnant une colonne de A^{-1}
- La procédure de Gauss-Jordan vue ci-après résout ces n SÉL en même temps en considérant le système augmenté $[A|I]$

Procédure de Gauss-Jordan pour calculer l'inverse d'une matrice

Pour trouver l'inverse de A :

1. On forme la matrice augmentée $[A|I]$
2. On applique la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 en dessous des pivots
3. On applique ensuite la procédure d'élimination de Gauss pour obtenir des 0 au-dessus des pivots
4. On divise chaque ligne de la matrice résultante par la valeur du pivot
5. On obtient ainsi la matrice augmentée $[I|A^{-1}]$

Gauss-Jordan (suite)

Remarque : Si on obtient au moins un pivot nul, la procédure s'arrête et on en conclut que la matrice n'est pas inversible

Exemple 2 : Inverser $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$