1. Élimination

Sections 2.2 et 2.3

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v1)

Plan

1. Vecteurs et combinaisons linéaires

2. Le concept d'élimination

3. L'élimination à l'aide de matrices

Vecteurs et équations linéaires

- Une *équation linéaire* est de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

avec $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, et $b \in \mathbb{R}$

- Un *système d'équations linéaires* (SÉL) est un ensemble d'équations linéaires. On s'intéresse ici au système $n \times n$

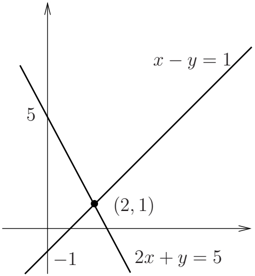
- Une *solution* à un SÉL est un n-tuplet de valeurs $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui vérifient simultanément toutes les équations du SÉL

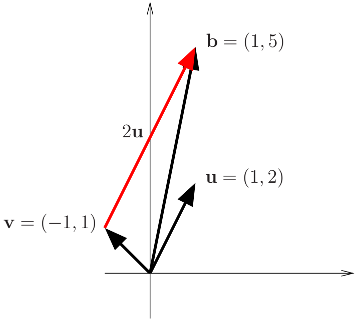
Exemple avec $n = 2$

Soit le SÉL

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 5 \end{array}\right.$$

Deux points de vue : *Portrait des lignes* et *portrait des colonnes* :



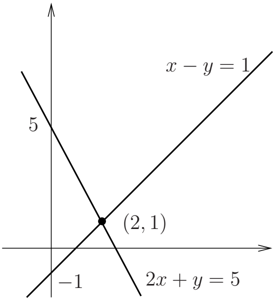


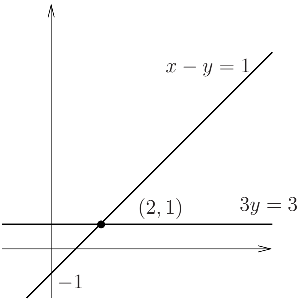
Exemple (suite)

Soit le SÉL

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 1 \\ 2x & + & y & = & 5 \end{array}\right.$$

Élimination :





Principe de l'élimination de Gauss

- L'objectif de l'élimination est d'obtenir un système triangulaire supérieur : On passe de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ à $U\mathbf{x} = \mathbf{c}$ avec U une matrice triangulaire supérieure (les coefficients sous la diagonale sont nuls)
- L'élimination est suivie d'une remontée triangulaire qui permet de construire simplement la solution $\mathbf{x}$
- Le *pivot* p_j est le premier coefficient non nul de la ligne j qui fait l'élimination
- Le *multiplicateur* ℓ_{ij} est le ratio du coefficient a_{ij} à éliminer sur le pivot (et donc le pivot ne peut être nul)
- On effectue l'opération $a_{ij} - \ell_{ij}p_j$ pour éliminer le coefficient a_{ij}

Procédure générale de l'élimination de Gauss

Pour résoudre un SÉL :

1. Utiliser la première équation pour générer par élimination des zéros sous le premier pivot :
$$L_2 \leftarrow L_2 - \ell_{21}L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{31}L_1, \text{ etc.}$$
2. Utiliser la nouvelle deuxième équation pour générer par élimination des zéros sous le deuxième pivot :
$$L_3 \leftarrow L_3 - \ell_{32}L_2,\ L_4 \leftarrow L_4 - \ell_{42}L_2, \text{ etc.}$$
3. Continuer ainsi jusqu'à l'obtention d'un système triangulaire
4. Résoudre par remontée triangulaire le système obtenu à l'étape 3

Exemple 1

En utilisant l'élimination, résoudre le système 3×3 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +9x_2 & -3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 10 \end{array} \right.$$

Échec de l'élimination

1. **Échec de type 1 :** Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = b$ où $b \neq 0$
   $\rightarrow$ le SÉL ne possède pas de solution

2. **Échec de type 2 :** Après l'élimination, le système triangulaire obtenu possède une équation de la forme $0x = 0$
   $\rightarrow$ le SÉL possède une infinité de solutions

3. **Échec de type 3 :** Le SÉL a un premier *pivot* qui est nul
   $\rightarrow$ la solution est de permuter les lignes

Remarques

Pour un SÉL à n équations et n inconnues :

1. Cette procédure fonctionne si le système triangulaire possède un ensemble de n pivots (non nuls), qui sont situés sur la diagonale

2. Si le système triangulaire possède n pivots (non nuls) alors on dit que le SÉL est *non singulier*. Sinon, il est *singulier*

Multiplication de matrices (1/2)

On considère ces deux points de vue :

1. Premier point de vue : l'élément (i, j) du produit AB est
$$(i\text{-ième ligne de } A)\cdot(j\text{-ième colonne de } B)$$

2. Deuxième point de vue : la j-ième colonne de AB est égale à $A\mathbf{u}_j$ où $\mathbf{u}_j$ est la j-ième colonne de B :

   Si $B = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_n \end{bmatrix}$ alors
$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{u}_1 & A\mathbf{u}_2 & \cdots & A\mathbf{u}_n \end{bmatrix}$$

(on verra d'autres points de vue)

Multiplication de matrices (2/2)

Remarque

Pour que le produit AB soit défini, il faut que

$$\text{nombre de colonnes de } A = \text{nombre de lignes de } B$$

Propriétés du produit matriciel

1. $(AB)C = A(BC)$ (associativité)
2. En général, $AB \neq BA$ (pas commutatif)

Rappel

Un SÉL à m équations et n inconnues s'écrit $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, c'est-à-dire

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

L'élimination à l'aide de matrices (1/2)

- La matrice d'élimination E_{ij} qui soustrait de la i-ième ligne de A un multiple ℓ (le multiplicateur) de la j-ième ligne est obtenue en remplaçant par $-\ell$ le 0 en position (i, j) dans la matrice identité I :

$$E_{ij}A \text{ effectue l'opération } L_i \leftarrow L_i - \ell L_j$$

- La matrice de permutation P_{ij} qui interchange les lignes i et j est obtenue en interchangeant les lignes i et j dans la matrice identité I :

$$P_{ij}A \text{ effectue l'opération } L_i \leftrightarrow L_j$$

L'élimination à l'aide de matrices (2/2)

La multiplication des deux membres du SÉL $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par E_{ij} ou P_{ij} n'affecte pas le vecteur des variables $\mathbf{x}$. C'est pourquoi il n'est pas nécessaire d'inclure ce vecteur dans les calculs.

On travaille plutôt avec la *matrice augmentée* du système :

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Exemple 2

En utilisant l'élimination à l'aide de matrices, résoudre le système 3×3 suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +4x_2 & -2x_3 & = & 2 \\ 4x_1 & +9x_2 & -3x_3 & = & 8 \\ -2x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 10 \end{array}\right.$$