

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 1 : Espaces vectoriels

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (chapitre.exercice).

Exercice 5.1 vrai ou faux (★)

Les énoncés suivant sont-ils vrais ou faux ?

1. L'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 est un sous-espace vectoriel de l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à 4 de dimension 4.
2. Avec $n \geq 2$, $\mathbb{R}^{n-1}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, tous deux différents de $\mathbf{0}$. Alors $\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est toujours un plan de $\mathbb{R}^3$.
4. Une famille composée de trois vecteurs distincts non nuls, tous dans $\mathbb{R}^3$, engendre nécessairement $\mathbb{R}^3$.
5. Les colonnes de toute matrice 4×5 sont linéairement dépendantes.

Exercice 5.3 (★)

Pour chaque couple de famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ et d'espace vectoriel V ci-dessous, la famille forme-t-elle une base de V ? Dans tous les cas, donner une famille distincte qui forme une base de V .

- a) $V = \mathbb{R}^2$ et la famille $((1, 2), (3, 4))$.
- b) $V = \mathbb{R}^3$ et la famille $((1, 2), (3, 4), (5, 6))$.
- c) $V = \mathbb{R}^2$ et la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$.
- d) $V = \mathbb{R}^4$ et la famille $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1))$.
- e) $V = \mathbb{R}^3$ et la famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1))$.

Exercice 5.4 (★)

Des couples d'ensembles (V, W) sont proposés ci-dessous, dans lesquels V est un espace vectoriel. Pour chacun, indiquer et justifier si W est un sous-espace vectoriel de V .

1. $V = \mathbb{R}^2$ et W est le disque de rayon 1 centré en l'origine.
2. $V = \mathbb{R}^3$ et W est un cube dont les côtés sont de longueur 1.
3. $V = \mathbb{R}^2$ et W est la droite d'équation $x_2 = x_1$.
4. $V = \mathbb{R}^{m \times n}$ et $W = \mathbb{R}^{n \times n}$, pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5.5 (★)

Déterminer si chacun des ensembles suivants est un espace vectoriel.

1. $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : 8x_1 - 5x_3 = 8 - 2x_2\}$.
2. $V = \text{Vect}((1, 1), (-1, 1))$.
3. $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - x_2 = x_3, 2x_2 = 3x_3 - x_4\}$.
4. $V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\}$.

Exercice 5.6 (★★)

Soient E un espace vectoriel et F et G des sous-espaces vectoriels de E . Montrer que :

1. $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E ;
2. $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

Exercice 5.7 espace des matrices (★★)

Montrer que $\mathbb{R}^{m \times n}$, l'ensemble des matrices réelles de taille $m \times n$, est un espace vectoriel.

Exercice 5.8 ensemble des suites bornées (★★)

Soit S l'espace vectoriel des suites à valeurs réelles. Soit E l'ensemble des suites de S bornées en valeur absolue, c'est-à-dire telles qu'il existe une constante strictement positive K supérieure à toutes les valeurs prises par la suite en valeur absolue :

$$E = \{u_n \in S, \exists K > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq K\}. \quad (1)$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S .

Exercice 5.10 espace des fonctions continues (★★)

Montrer que l'ensemble des fonctions continues sur un intervalle est un espace vectoriel.

Exercice 5.11 espace des fonctions bornées (★★)

Montrer que l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Exercice 5.12 espace de polynômes 2 (★)

Montrer que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux, est un espace vectoriel.

Exercice 5.13 (★)

Déterminer si $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.14 espace de polynômes 1 (★)

Montrer que $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, l'ensemble des polynômes réels de degré inférieur ou égal à deux, est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Exercice 5.15 (★★)

La base canonique de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ a été définie précédemment. On considère V l'ensemble des polynômes de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tels que $p(1) = 0$.

1. Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
2. Donner une base de V .

Exercice 5.16 (★)

Montrer que $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$, l'ensemble des vecteurs du premier quadrant de $\mathbb{R}^2$, n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 5.23 (★)

Montrer que l'ensemble des matrices inversibles n'est pas un espace vectoriel.

Exercice 5.24 (★)

$\mathbb{R}^{n \times n}$ est un espace vectoriel. Lesquels sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{n \times n}$?

1. L'ensemble des matrices inversibles.
2. L'ensemble des matrices de déterminant nul.
3. L'ensemble des matrices anti-symétriques ($\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$)
4. Le singleton $\{\mathbf{O}_{n,n}\}$.

Exercice 5.27 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (★★)

1. Trouver une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ l'espace des polynômes de degré au plus trois.
2. Donner une base du sous-espace de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ où $p(1) = 0$.

Exercice 5.28 (★)

Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donner des conditions sur ces vecteurs pour que $\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ soit

1. $\mathbb{R}^3$;
2. Un plan de $\mathbb{R}^3$;
3. Une droite de $\mathbb{R}^3$;
4. $\{\mathbf{0}\}$.

Exercice 5.29 (★)

Dans chacun des cas suivants, décrire géométriquement $\text{Vect}(F)$ et en donner une représentation paramétrique :

1. $F = ((1, 1)) \subset \mathbb{R}^2$;

2. $F = ((1, 0), (0, 1)) \subset \mathbb{R}^2$;
3. $F = ((1, 1), (-1, 1)) \subset \mathbb{R}^2$;
4. $F = ((1, 1), (-1, -1)) \subset \mathbb{R}^2$;
5. $F = ((1, 0), (0, 1), (1, 1)) \subset \mathbb{R}^2$;
6. $F = ((1, 0, 1), (1, 0, -1)) \subset \mathbb{R}^3$;
7. $F = ((1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 2, 0)) \subset \mathbb{R}^3$;
8. $F = ((1, 1, 1), (-1, 1, 0), (0, 2, 1)) \subset \mathbb{R}^3$;
9. $F = ((1, 0, 1), (-1, 0, -1), (2, 0, 2)) \subset \mathbb{R}^3$.

Quel point (de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{R}^3$) appartient à chacun de ces ensembles générés ?

Exercice 5.30 les deux définitions de la dépendance (★★)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel est dite *liée* si l'un de ses vecteurs peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $p - 1$ autres. Mais ce cours donne la définition suivante : cette même famille est liée si et seulement si le système d'équations formé par

$$x_1 \mathbf{u}_1 + x_2 \mathbf{u}_2 + \dots + x_p \mathbf{u}_p = \mathbf{0}$$

admet une autre solution que la solution triviale

$$x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0.$$

Montrer que ces deux définitions sont bien équivalentes.

Exercice 5.32 (★★)

Soient V un espace vectoriel et $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ une famille libre de V . Montrer que la famille extraite $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \dots, \mathbf{v}_p)$ est également une famille libre de V .

Exercice 6.1 hyperplan et noyau (★★)

Soit l'hyperplan $x + 2y - 3z - t = 0$ de $\mathbb{R}^4$. Donner une matrice $\mathbf{A}$ dont le noyau est cet hyperplan. Trouver trois vecteurs linéairement indépendants appartenant à cet hyperplan. Pourquoi n'est-il pas possible d'en trouver quatre ?

Exercice 6.2 vrai ou faux (★★)

Répondez par vrai ou faux en justifiant vos réponses :

1. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ deux matrices de même taille, où $\mathbf{D}$ est inversible. Alors, $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{DA})$.
2. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{D}$ deux matrices de même taille, où $\mathbf{D}$ est inversible. Alors, $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{AD})$.

Exercice 6.3 (★)

Donner une matrice $\mathbf{A}$ telle que $\text{Im}(\mathbf{A})$ est égale à

$$\{(-3a, 5c - 6b, a + b + c, a - c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 6.21 noyaux de produits de matrices (★)

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices carrées.

1. Est-il toujours vrai que $\text{Ker}(\mathbf{B}) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{AB})$? Si c'est vrai, démontrer-le, sinon donner un contre-exemple.
2. Montrer que si $\mathbf{A}$ est inversible, alors $\text{Ker}(\mathbf{AB}) = \text{Ker}(\mathbf{B})$.
3. Donner un exemple de matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telles que $\text{Ker}(\mathbf{AB}) \not\subseteq \text{Ker}(\mathbf{B})$.

Exercice 6.22 image de produits de matrices carrées (★)

Soient $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ deux matrices carrées.

1. Montrer que $\text{Im}(\mathbf{AB}) \subseteq \text{Im}(\mathbf{A})$.
2. Est-il toujours vrai que $\text{Im}(\mathbf{A}) \subseteq \text{Im}(\mathbf{AB})$? Justifier par un raisonnement ou un contre-exemple.
3. Montrer que si $\mathbf{B}$ est inversible, alors $\text{Im}(\mathbf{AB}) = \text{Im}(\mathbf{A})$.