

1. Espaces vectoriels

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-28

v0

Plan

Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image d'une matrice

Bases et dimension

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ 5.1 : Définitions des espaces et des sous-espaces
- ▶ 6.1 : Espaces vectoriels et matrices
- ▶ 5.2 : Bases

Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image d'une matrice

Bases et dimension

Espaces vectoriels

Un *espace vectoriel* (réel) est un ensemble V muni de deux opérations : si x et y sont des éléments de V et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors on définit les éléments

1. $x + y \in V$
2. $\alpha x \in V$

Ces deux opérations satisfont à huit propriétés telles que la commutativité, l'associativité, etc.

Remarque : On peut aussi définir des espaces vectoriels avec des scalaires $\alpha \in \mathbb{C}$

Les huit propriétés des opérations d'un espace V

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ commutativité

2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ associativité

3. V contient un vecteur $\mathbf{0}$ unique tel que $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x}$ élément neutre

4. V contient un vecteur $-\mathbf{x}$ unique tel que $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ symétrie

5. $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ unité

6. $(\alpha\beta)\mathbf{x} = \alpha(\beta\mathbf{x})$ compatibilité

7. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ distributivité (vecteurs)

8. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ distributivité (scalaires)

(avec $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ et α, β des scalaires)

Exemples d'espaces vectoriels

- ▶ *L'espace* $\mathbb{R}^n$ est formé de tous les vecteurs colonnes $\mathbf{v}$ à n composantes réelles
- ▶ *Espace* $\mathbb{C}^n$: les composantes de $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ sont des nombres complexes
- ▶ $\mathbb{R}^{n \times n}$: matrices réelles $n \times n$
- ▶ Ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$: $f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}$ avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$: polynômes réels ou complexes de degré $\leq n$
- ▶ $\{\mathbf{0}\}$: vecteur zéro uniquement

Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image d'une matrice

Bases et dimension

Sous-espaces vectoriels (sev)

Un *sous-espace* d'un espace vectoriel V est un sous-ensemble W de vecteurs de V qui satisfait à trois exigences :

1. $\mathbf{0} \in W$

et si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont des vecteurs du sev $W \subseteq V$ et si $\alpha \in \mathbb{R}$ alors :

2. $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ appartient à W

fermeture sous l'addition

3. $\alpha\mathbf{x}$ appartient à W

fermeture sous la multiplication par un scalaire

on peut montrer 2. et 3. directement avec $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in W$

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V .

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V . Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_j$ ($j \in \llbracket 1; n \rrbracket$) et est noté $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V .
Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_j$ ($j \in \llbracket 1; n \rrbracket$) et est noté $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$
3. Si V est un espace vectoriel alors V lui-même et $\{\mathbf{0}\}$ sont des sev de V

Remarques

1. Par définition, un sev W contient toutes les combinaisons linéaires de vecteurs provenant de W
2. Réciproquement, si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ sont des vecteurs de l'espace vectoriel V alors l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs est un sev de V . Ce sous-espace est appelé le *sous-espace engendré* par les vecteurs $\mathbf{v}_j$ ($j \in \llbracket 1; n \rrbracket$) et est noté $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$
3. Si V est un espace vectoriel alors V lui-même et $\{\mathbf{0}\}$ sont des sev de V
4. Un sev est un espace vectoriel

Exemples de sev

- ▶ Un plan dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par l'origine

(un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de *dimension* $n - 1$ est appelé un *hyperplan*)

- ▶ Une droite dans $\mathbb{R}^3$ qui passe par l'origine

- ▶ Deux sous-espaces de $\mathbb{R}^{n \times n}$:

- ▶ Toutes les matrices triangulaires supérieures de taille $n \times n$
- ▶ Toutes les matrices diagonales de taille $n \times n$

Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image d'une matrice

Bases et dimension

Noyau d'une matrice

Le *noyau* d'une matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est l'ensemble des vecteurs qui sont solutions du SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$:

$$\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

C'est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$

Colonnes pivot et rang

On verra **plus tard** *comment* déterminer $\text{Ker}(\mathbf{A})$. Voici les principales étapes :

- ▶ Un procédé d'**échelonnement** (Gauss) permet d'obtenir une matrice $\mathbf{U}$ qui est **échelonnée**
ou
- ▶ Un procédé de **réduction** (Gauss-Jordan) permet d'obtenir une matrice $\mathbf{R}$ qui est **échelonnée réduite**
- ▶ $\mathbf{U}$ (ou $\mathbf{R}$) permet de déterminer si chaque colonne de $\mathbf{A}$ est soit une **colonne pivot**, soit une **colonne libre**
- ▶ Le nombre de colonnes pivot est appelé le **rang de $\mathbf{A}$** , noté $r = \text{rg}(\mathbf{A})$

Image d'une matrice

- ▶ L'*image* de la matrice

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

est constituée de toutes les combinaisons linéaires des colonnes de $\mathbf{A}$ (vues comme des vecteurs)

- ▶ Ce sont tous les vecteurs $\mathbf{Ax} \in \mathbb{R}^m$ possibles, avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$
- ▶ Elle est notée $\text{Im}(\mathbf{A})$ et c'est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$:

$$\begin{aligned}\text{Im}(\mathbf{A}) &= \{\mathbf{Ax} \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\} \\ &= \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \text{ tel qu'il existe } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}\} \\ &= \text{Vect}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \text{Vect}(\text{Col}(\mathbf{A})) \\ &\subseteq \mathbb{R}^m\end{aligned}$$

Image : Propriété fondamentale pour les SÉLs

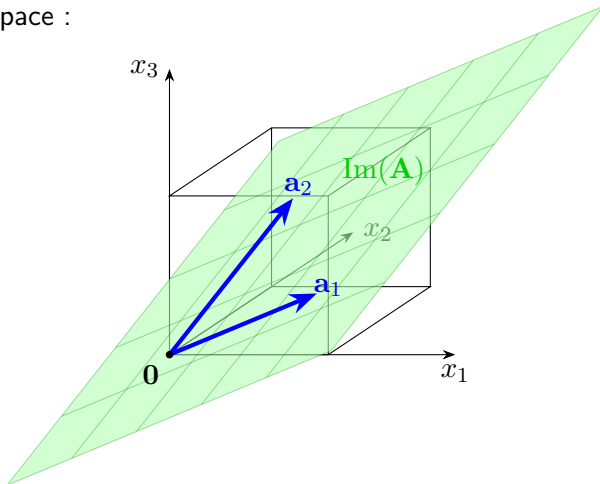
Le SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède (*au moins*) une solution



$$\mathbf{b} \in \text{Im}(\mathbf{A})$$

Exemple

L'image de la matrice $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2]$ est représentée par un plan dans l'espace :



Exercice 1

Décrire l'image des matrices

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Espaces vectoriels

Sous-espaces vectoriels

Noyau et image d'une matrice

Bases et dimension

Famille génératrice et base

Rappel

Une famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ *engendre* (ou *génère*) un espace vectoriel V si tout vecteur de V est combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_i$ avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ceci est noté $V = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$

Définition

Une famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une *base* d'un espace vectoriel V si

1. les vecteurs $\mathbf{v}_i$ sont linéairement indépendants

et

2. $V = \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$

Bases et colonnes de $\mathbf{A}$

- ▶ Les colonnes d'une matrice génèrent son image
- ▶ Pour une matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ qui est inversible :
 - ▶ Les colonnes sont linéairement indépendantes
 - ▶ $\text{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$

Autrement dit, les colonnes de $\mathbf{A}$ forment une base de $\mathbb{R}^n$

- ▶ Pour une matrice $\mathbf{A}$ de taille $m \times n$:
 - ▶ Les colonnes ne sont pas nécessairement linéairement indépendantes
 - ▶ Les **colonnes pivot** de $\mathbf{A}$ forment une base de $\text{Im}(\mathbf{A})$

Lien avec un SÉL

Théorème

- ▶ n vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$ engendrent $\mathbb{R}^n$
- ▶ n vecteurs qui engendrent $\mathbb{R}^n$ sont nécessairement linéairement indépendants

Ce théorème peut être reformulé comme suit en termes de SÉL :

- ▶ Si les colonnes d'une matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ sont linéairement indépendantes, alors :
 - ▶ Elles engendrent $\mathbb{R}^n$
 - ▶ Elles forment une base de $\mathbb{R}^n$
 - ▶ $\text{Im}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$
 - ▶ $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ possède une solution unique

Dimension

Théorème

Si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ est une base de l'espace vectoriel V , alors tout vecteur de V s'écrit de façon **unique** comme combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_i$ avec $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

Théorème

Si $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ et $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q)$ sont deux bases d'un espace vectoriel donné alors $p = q$

Autrement dit, toute base d'un espace vectoriel contient le même nombre de vecteurs

Définition

La **dimension** d'un espace vectoriel V est le nombre de vecteurs dans une base de V . On la note **$\dim(V)$**

Dimension finie vs infinie

Un espace vectoriel est de dimension finie s'il possède une famille génératrice de cardinalité finie. Sinon, il est de dimension infinie

Exemple : $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ vs $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (l'ensemble de tous les polynômes réels)

Ensemble $\{0\}$

- ▶ L'ensemble $\{0\}$ est un espace de dimension 0
- ▶ La seule base de $\{0\}$ est l'ensemble vide $\emptyset$ ¹
- ▶ Le vecteur nul 0 ne peut pas faire partie d'une base car l'indépendance linéaire serait alors perdue

1. ou plus exactement la famille vide.

Exercice 2

Trouver trois vecteurs indépendants dans l'hyperplan
 $x + 2y - 3z - t = 0$ de $\mathbb{R}^4$. Pourquoi ne peut-on en trouver quatre ?

Indication : Utiliser une matrice dont le noyau est cet hyperplan

Exercice 3

Trouver une base de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, l'espace des polynômes réels $p(x)$ de degré ≤ 3 . Donner une base du sev de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ où $p(1) = 0$