

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 13 : Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 13.1 vrai ou faux ? (★)

Les énoncés suivant sont-ils vrais ou faux ? Justifier.

1. Une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}^\top$ est $\mathbf{V}\Sigma\mathbf{U}^\top$ si une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$ est $\mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top$.
2. Les valeurs singulières d'une matrice sont toujours négatives.
3. Toute matrice carrée admet une décomposition en valeurs singulières.
4. Une matrice $\mathbf{A}$ diagonale admet toujours une décomposition en valeurs singulières avec $\mathbf{U} = \mathbf{V} = \mathbf{I}$ et $\Sigma = \mathbf{A}$.
5. Si une matrice $\mathbf{A}$ est nulle, alors toutes ses valeurs singulières sont nulles.
6. Une décomposition en valeurs singulières d'une matrice réelle peut faire intervenir des matrices $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ complexes.
7. La matrice $\mathbf{V}$ dans une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$ peut être formée à partir de n'importe quelle base de $\mathbb{R}^n$.
8. La décomposition en valeurs singulières d'une matrice donnée est unique.
9. Lors du calcul d'une décomposition en valeurs singulières, il peut être nécessaire d'effectuer trois fois l'algorithme de Gram-Schmidt.
10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2/3 & 2 \\ -4/3 & 1 \\ -4/3 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ est une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

Exercice 13.2 (★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ possédant deux valeurs singulières distinctes $\sigma_1 = a$ et $\sigma_2 = b \neq a$, et dont une décomposition en valeurs singulières est $\mathbf{A} = \mathbf{U}\Sigma\mathbf{V}^\top$, avec $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ orthogonales, et $\Sigma \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$.

1. Donner l'expression de Σ en fonction de a et b .
2. Quelles sont les tailles de $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$?
3. Quelle est la dimension des quatre sous-espaces fondamentaux de $\mathbf{A}$?
4. Dires lesquels de ces quatre mêmes sous-espaces sont $\mathbb{R}^2$, $\{\mathbf{0}\}$, ou des plans.

Exercice 13.3 (*)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer les valeurs singulières de $\mathbf{A}$ et les positionner dans une matrice diagonale $\mathbf{\Sigma}$.
2. Déterminer une matrice orthogonale $\mathbf{V}$ d'une décomposition SVD de $\mathbf{A}$ étant donné $\mathbf{\Sigma}$.
3. Déterminer une matrice orthogonale $\mathbf{U}$ d'une décomposition SVD de $\mathbf{A}$ étant donné $\mathbf{\Sigma}$ et $\mathbf{V}$.
4. Vérifier que $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$.

Exercice 13.4 (**)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Donner une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.
2. Exprimer $\mathbf{A}$ comme une somme de matrices de rang un.

Exercice 13.5 (**)

Donner une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercice 13.6 (*)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. Donner le rang de $\mathbf{A}$.
2. Donner une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

Exercice 13.7 (*)

Soit $\mathbf{A} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 5 & -1 \\ -4 & 8 \end{bmatrix}$. Donner une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

Exercice 13.8 (**)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs singulières de $\mathbf{A}$.
2. Donner une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

Exercice 13.9 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer les valeurs singulières de $\mathbf{A}$.
2. Donner une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

Exercice 13.10 (★★)

Soit $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2] \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$ de rang 2 telle que $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} = c^2 \mathbf{I}_2$ avec $c > 0$.

1. Montrer que $\text{Ker}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.
2. Montrer que $\text{Im}(\mathbf{A}) = \text{Vect}\left(\frac{\mathbf{a}_1}{c}, \frac{\mathbf{a}_2}{c}\right)$.
3. Montrer que $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = ((1, 0), (0, 1))$ est une base de $\text{Im}(\mathbf{A}^\top)$.
4. En prenant $\mathbf{u}$ un vecteur unitaire du noyau à gauche de $\mathbf{A}$, donner une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}$.

5. Appliquer le résultat précédent à la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercice 13.11 (★)

Soit $\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Exprimer $\mathbf{A}$ comme une somme de deux matrices de rang un.

Exercice 13.12 (★★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice dont une décomposition en valeurs singulières est $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$ avec $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale, et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale. Soient σ_i les valeurs singulières de $\mathbf{A}$ et λ_i les valeurs propres de $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On note $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \cdots \ \mathbf{v}_n]$, $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \cdots \ \mathbf{u}_m]$, et $r = \text{rg}(\mathbf{A})$.

1. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, $\mathbf{u}_i$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$. Préciser la valeur propre associée.
2. Montrer que pour tout $i \in \llbracket r+1; m \rrbracket$, $\mathbf{u}_i$ est un vecteur propre de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ pour la valeur propre nulle.

On remarque donc qu'il est possible de construire une décomposition en valeurs singulières en utilisant $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ plutôt que $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$, car les vecteurs propres de $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ sont précisément les vecteurs $\mathbf{u}_i$ pour $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$.

Exercice 13.13 approximation de rang un (*)

En utilisant la décomposition en valeurs singulières trouvée à l'exercice 13.4, donner la meilleure approximation de rang 1 de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et donner une mesure de l'erreur d'approximation.

Exercice 13.15 conditionnement (*)

Donner le conditionnement de la matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ de l'exercice 13.4.

Exercice 13.16 SVD de la transposée (*)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice dont une décomposition en valeurs singulières est $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^\top$, avec $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonale, et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonale. Donner une expression d'une décomposition en valeurs singulières de $\mathbf{A}^\top$ en fonction de $\mathbf{\Sigma}$, $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$.