

12. Matrices symétriques et matrices définies positives

MTH1008

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

H26

2026-03-23

v4

Plan

1. Matrices définies positives

- Définitions

- Énergie d'une matrice

- Décomposition de Cholesky

- Caractériser une matrice définie positive

- Matrices (semi-)définies négatives et non-définies

- Matrices semi-définies positives (SDP)

- Optimisation

Liens avec le manuel *alfa*

- ▶ Chapitre 12 : Signe des matrices

1. Matrices définies positives

- Définitions

- Énergie d'une matrice

- Décomposition de Cholesky

- Caractériser une matrice définie positive

- Matrices (semi-)définies négatives et non-définies

- Matrices semi-définies positives (SDP)

- Optimisation

Définitions

- ▶ Une matrice **symétrique** $\mathbf{A}$ est *définie positive* (noté $\mathbf{A} \succ 0$) si toutes ses valeurs propres sont strictement positives
- ▶ Une matrice symétrique peut être
 - ▶ définie positive : $\mathbf{A} \succ 0$
 - ▶ semi-définie positive : $\mathbf{A} \succeq 0$
 - ▶ définie négative : $\mathbf{A} \prec 0$
 - ▶ semi-définie négative : $\mathbf{A} \preceq 0$
 - ▶ non-définie (ou indéfinie)

Valeurs propres pour une matrice symétrique 2×2

► Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ symétrique

► $\mathbf{A}$ est définie positive si et seulement si

$$a > 0 \text{ et } \det(\mathbf{A}) = ac - b^2 > 0$$

► Sinon, si $a < 0$ et $\det(\mathbf{A}) > 0$, $\mathbf{A}$ est *définie négative* (noté $\mathbf{A} \prec 0$)

► Sinon $\mathbf{A}$ peut encore être *semi-définie positive*, *semi-définie négative*, et sinon *non-définie* (ou *indéfinie*)

Énergie d'une matrice (forme quadratique)

- ▶ $\mathbf{A}$ est définie positive si $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pour tout vecteur non nul $\mathbf{x}$
- ▶ Illustration pour $n = 2$:

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0$$

- ▶ $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ est donc strictement positif pour $\mathbf{A} \succ 0$ et tout $\mathbf{x}$ non nul. C'est l'*énergie* de $\mathbf{A}$ (en $\mathbf{x}$)
- ▶ Si $\mathbf{A}$ est (symétrique) définie positive, alors l'équation

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$$

représente une ellipse dont les axes pointent dans la direction des vecteurs propres et dont les longueurs sont $\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$

Exercice 2

Quel est le signe des matrices suivantes ?

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Remarques

- ▶ Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont (symétriques) définies positives, alors $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ l'est aussi
- ▶ *Décomposition de Cholesky* : Si $\mathbf{A}$ est définie positive, alors elle peut se décomposer en

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^\top$$

avec $\mathbf{L}$ triangulaire inférieure

Sous-matrices principales

Les n *sous-matrices principales* de $\mathbf{A} = [a_{i,j}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_1 &= [a_{1,1}] \\
 \mathbf{A}_2 &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_3 &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{A}_k &= \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,k} \end{bmatrix} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{A}_n &= \mathbf{A}
 \end{aligned}$$

Cinq énoncés équivalents pour caractériser une matrice définie positive

Pour une matrice définie positive $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$, les énoncés suivants sont équivalents :

1. les n pivots de $\mathbf{A}$ sont strictement positifs (élimin. sans permutation)
2. les n déterminants des sous-matrices principales de $\mathbf{A}$ (notés α_i , $i = 1, 2, \dots, n$) sont strictement positifs
3. les n valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont strictement positives
4. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ (définition basée sur l'énergie)
5. la **décomposition de Cholesky** $\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^\top$ est possible

Matrices définies négatives et semi-définies négatives

- ▶ La matrice symétrique $\mathbf{A}$ est *définie négative* (noté $\mathbf{A} \prec 0$) si son opposée $-\mathbf{A}$ est définie positive
- ▶ La matrice symétrique $\mathbf{A}$ est *semi-définie négative* (noté $\mathbf{A} \preceq 0$) si son opposée $-\mathbf{A}$ est semi-définie positive

Matrices non-définies

- ▶ Une matrice symétrique qui n'est ni définie positive, semi-définie positive, définie négative ou semi-définie négative, est *non-définie* (ou *indéfinie*)
- ▶ Une matrice possédant des valeurs propres de signes différents est non-définie

Exercice 3

Donner le signe de

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Matrices semi-définies positives (SDP)

- ▶ La matrice symétrique $\mathbf{A}$ est *semi-définie positive* (noté $\mathbf{A} \succeq 0$) si

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0 \text{ pour tout } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

- ▶ Toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont ≥ 0
- ▶ Toute matrice définie positive est également semi-définie positive
- ▶ Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors $\mathbf{A}^\top \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est symétrique et SDP

Matrices SDP et sous-matrices

- ▶ Le test basé sur les déterminants des sous-matrices principales (les α_i) ne fonctionne pas pour déterminer si une matrice est SDP
- ▶ Si un de ces α_i est égal à zéro, alors la matrice peut être SDP ou indéfinie
- ▶ Pour vérifier qu'une matrice est SDP, il faut montrer que les déterminants de **toutes** les sous-matrices carrées sont ≥ 0
- ▶ Voir le **critère de Sylvester** vu dans le cours de Calcul

Application : Optimisation (rappel)

Soit $f(\mathbf{x})$ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

- ▶ Les points stationnaires (ou critiques) de f sont les points $\mathbf{x}^*$ tels que $\nabla f(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$
- ▶ Si $\nabla^2 f(\mathbf{x}^*)$ (la *matrice hessienne* en $\mathbf{x}^*$ critique) est :
 - ▶ définie positive : $\mathbf{x}^*$ est un *minimum local* de f
 - ▶ définie négative : $\mathbf{x}^*$ est un *maximum local* de f
 - ▶ non-définie : $\mathbf{x}^*$ est un *point de selle* (ou *point-col*)
- ▶ Si $\nabla^2 f(\mathbf{x})$, **pour tout** $\mathbf{x}$, est :
 - ▶ semi-définie positive : f est *convexe* et $\mathbf{x}^*$ est un *minimum global* de f
 - ▶ semi-définie négative : f est *concave* et $\mathbf{x}^*$ est un *maximum global* de f