

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 12 : Signe des matrices

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 12.1 vrai ou faux (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Pour toute matrice symétrique définie positive $\mathbf{A}$, $-\mathbf{A}$ est aussi symétrique définie positive.
2. Si $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive alors $\mathbf{A}^k$ l'est aussi.
3. Si $\mathbf{A}^k$ est symétrique définie positive alors $\mathbf{A}$ l'est aussi.
4. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont symétriques définies positives alors la matrice bloc $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ l'est aussi.
5. Si $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive alors $\mathbf{A}^{-1}$ est symétrique définie positive.
6. Si $\mathbf{A}$ est une matrice carrée et symétrique de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et si la forme quadratique $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$ est semi-définie positive, c'est-à-dire que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$$

alors $\mathbf{A}$ a des valeurs propres positives ou nulles.

7. Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique réelle, alors $\text{Ker } \mathbf{A} \perp \text{Im } \mathbf{A}$.

Exercice 12.2 Singe d'une matrice (★)

Déterminer le signe de chacune des matrices suivantes.

1. $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$;
2. $\mathbf{O}_3$;
3. $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Exercice 12.3 expressions de formes quadratiques (★)

Pour chacune des matrices suivantes, exprimer la forme quadratique $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}_i \mathbf{x}$:

$$\mathbf{A}_1 = [3], \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Exercice 12.4 forme quadratique définie positive ? (★)

Soit la forme quadratique $Q : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow x^2 + y^2 + 2\alpha xy$

1. Donner la matrice symétrique représentative de Q exprimée dans la base canonique, trouver ses valeurs propres et une base de vecteurs propres associée.
2. À quelles conditions sur α la matrice est définie positive ?

Exercice 12.5 la norme euclidienne en tant que forme quadratique (★)

Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ est une forme quadratique définie positive.

Exercice 12.6 invariance par changement de base orthogonale (★)

Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique définie positive. Montrer que si $\mathbf{B}$ est une matrice orthogonale, alors $\mathbf{BAB}^\top$ est aussi symétrique définie positive.

Exercice 12.7 factorisation de Cholesky explicite (★★)

Soit la matrice réelle

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 13 & 23 \\ 4 & 23 & 77 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire inférieure $\mathbf{L}$ à coefficients réels telle que $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^\top$.
2. La factorisation $\mathbf{A} = \mathbf{LL}^\top$ est-elle unique ?
3. Déterminer explicitement une telle matrice $\mathbf{L}$ satisfaisant la factorisation.

Exercice 12.8 classification de quelques formes quadratiques (★)

Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont définies positives, négatives, semi-définies positives ou négatives ou indéfinies :

1. $Q_1(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$;
2. $Q_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$;
3. $Q_3(x, y) = x^2 - 2xy + 4y^2$;
4. $Q_4(x, y, z) = x^2 + y^2 + 2yz + z^2$;
5. $Q_5(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy + 2yz$.

Exercice 12.9 minimum d'une forme quadratique définie positive sur la sphère unité (★★)

Soit la matrice symétrique

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

et la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\mathbf{A}$

est définie positive et déterminer la valeur minimale de f lorsque $\mathbf{x}$ parcourt la boule unité fermée

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \right\}.$$

Indiquer également un vecteur $\mathbf{x}$ qui réalise ce minimum.

Exercice 12.10 maximum d'une forme quadratique définie négative sur la sphère unité (★★)

Soit la matrice symétrique définie négative

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

et la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{B} \mathbf{x}$, où $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la

valeur maximale de $g(\mathbf{x})$ lorsque $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ vérifie $\|\mathbf{x}\|^2 = 1$, et donner un vecteur qui atteint ce maximum.

Exercice 12.11 une matrice de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ paramétrée (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Le but de cet exercice est de déterminer pour quels réels a la matrice $\mathbf{A}$ est symétrique définie positive sans avoir à calculer ses valeurs propres pour tout $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont distinctes réelles.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ n'a jamais plus d'une valeur propre nulle et qu'elle a exactement une valeur propre nulle en $a = \frac{1}{2}$.
3. Soient ϕ_1 et ϕ_2 les deux fonctions qui associent respectivement à a les deux valeurs propres λ_1 et λ_2 par ordre croissant. Il peut être démontré que ces deux fonctions sont continues.
 - (a) Soient $a_1 = 0$ et $a_2 = 2$, calculer $\phi_i(a_j), \forall i, j \in \{1, 2\}$.
 - (b) En déduire que $\phi_2 > 0$ et que ϕ_1 est positive pour tout $a > \alpha$ où α est à déterminer. Conclure l'exercice.

Exercice 12.12 classification des formes quadratiques du plan (★★)

Soit la forme quadratique $Q(\mathbf{x}) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ avec $\mathbf{x} = (x, y)$.

1. Donner la matrice symétrique $\mathbf{A}$ telle que $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x}$.
2. Soient λ_1, λ_2 les deux valeurs propres de $\mathbf{A}$, montrer que Q est définie négative si et seulement si $ac > b^2$ et $a + c < 0$.
3. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que Q soit définie positive.
4. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que Q soit semi-définie positive ainsi que celles pour que Q soit semi-définie négative.
5. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour que Q soit indéfinie.

Exercice 12.13 une forme quadratique définie positive mais des valeurs propres complexes ? (★★)

Chercher une matrice de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ qui est définie positive (c'est-à-dire $\mathbf{x}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$) mais qui a des valeurs propres complexes. Quel enseignement tirez-vous de l'existence d'une telle matrice ?

Exercice 12.14 quelques opérations stables sur les matrices symétriques définies positives (★)

Cet exercice a pour but de montrer que certaines opérations sur les matrices symétriques définies positives préservent la propriété de définition positive.

1. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive, $r > 0$, montrer que $r\mathbf{A}$ est définie positive.
2. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique définie positive, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique semi-définie positive, montrer que $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ est définie positive.
3. En déduire que si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive, $\mathbf{B}$ une matrice symétrique semi-définie positive et $r > 0$, alors $\mathbf{A} + r\mathbf{B}$ est définie positive.

Exercice 12.15 une matrice de 1 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$ la matrice de taille $n \times n$ dont tous les coefficients sont égaux

à 1. Montrer que $\mathbf{A}$ est semi-définie positive.

Exercice 12.16 signe des matrices de Householder (★★)

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, on appelle *matrice de Householder associée à $\mathbf{v}$* la matrice

$$\mathbf{H}_{\mathbf{v}} = \mathbf{I} - 2 \frac{\mathbf{v} \mathbf{v}^\top}{\mathbf{v}^\top \mathbf{v}}. \quad (1)$$

Le but de cet exercice est de classer les formes quadratiques associées à ces matrices.

1. Montrer que $\mathbf{H}_{\mathbf{v}}$ est symétrique et orthogonale.
2. Montrer que $\|\mathbf{H}_{\mathbf{v}}\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.
3. En déduire que $\text{Sp}(\mathbf{H}_{\mathbf{v}}) \subseteq \{-1, 1\}$.
4. On suppose que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ tel que $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$. Calculer $\mathbf{H}_{\mathbf{v}}\mathbf{v}$ et $\mathbf{H}_{\mathbf{v}}\mathbf{u}$.
5. $\mathbf{H}_{\mathbf{v}}$ est-elle définie positive, négative, semi-définie positive, semi-définie négative ou indéfinie ? Est-ce valable quel que soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$?

Exercice 12.18 Retour sur les disques de Gerschgorin (★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Sans calculer les valeurs propres de $\mathbf{A}$ et en utilisant un résultat provenant de l'étude de cas du manuel et le fait que $\mathbf{A}$ est symétrique, montrer que les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont comprises dans l'intervalle $[2; 13]$ et donc que $\mathbf{A}$ est définie positive.

Exercice 12.19 complément de Schur (★★★)

Soient $\mathbf{Q}$ et $\mathbf{R}$ deux matrices symétriques carrées respectivement d'ordre m et n . Soit $\mathbf{S}$ une matrice rectangulaire de taille $m \times n$. Le but de cet exercice est de montrer l'implication suivante :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{S} \\ \mathbf{S}^\top & \mathbf{R} \end{bmatrix} \succ \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{R} \succ \mathbf{0} \text{ et } \mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top \succ \mathbf{0} \quad (2)$$

Posons $f(\mathbf{y}) = \mathbf{x}^\top \mathbf{Q}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^\top \mathbf{S}\mathbf{y} + \mathbf{y}^\top \mathbf{R}\mathbf{y}$.

1. Montrer que pour f soit définie positive il est nécessaire que $\mathbf{R}$ soit définie positive.
2. À l'aide de la minimisation de f , montrer que $\mathbf{x}^\top (\mathbf{Q} - \mathbf{S}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{S}^\top) \mathbf{x} > 0$ pour tout $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
3. En développant le membre de gauche de cette équation, conclure quant à la véracité de l'assertion initiale de cet exercice.

Exercice 12.20 inversibilité de la matrice du Laplacien 1D (★★★)

Soit $\mathbf{A}$ la matrice d'ordre n définie par :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Cette matrice est appelée *matrice du Laplacien 1D discrétisé*. On souhaite étudier ses propriétés et les conditions d'inversibilité de la matrice $\mathbf{A} + \mathbf{I}$. Cette matrice est utilisée dans le contexte de la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles, notamment l'équation de la chaleur.

1. Soit λ une valeur propre de $\mathbf{A}$ et soit $\mathbf{x}$ un vecteur propre associé. Montrer que $\lambda + 1$ est une valeur propre de $\mathbf{A} + \mathbf{I}$.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ est une matrice *symétrique* et *définie positive*.
3. En déduire que toutes les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont *strictement positives*.
4. On admet que les valeurs propres de $\mathbf{A}$ sont données par :

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Justifier pourquoi toutes ces valeurs propres sont strictement positives.

5. Prenons maintenant $u > 0$. En déduire que $u\mathbf{A} + \mathbf{I}$ est inversible.

En prenant $u = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ avec α la diffusivité thermique du conducteur de chaleur, vous venez en fait de montrer que le schéma numérique de différences finies par Euler implicite permettant la résolution d'une équation de la chaleur est inconditionnellement stable.