11. Valeurs propres et diagonalisation

Sections 6.1 et 6.2

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v2)

Plan

1. Valeurs et vecteurs propres

2. Diagonalisation d'une matrice

1. **Valeurs et vecteurs propres**

2. Diagonalisation d'une matrice

Définitions

Soit $\mathbf{A}$ une matrice **carrée** de taille $n \times n$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur **non nul** et $\lambda \in \mathbb{R}$

Si

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$$

alors

- $\mathbf{x}$ est un *vecteur propre* de $\mathbf{A}$ $\quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$
- λ est une *valeur propre* de $\mathbf{A}$

Exemples d'applications

Source : Wikipedia.

- Étude des phénomènes vibratoires (Ex. : Mouvements d'une corde vibrante)
- *"Mise au point d'algorithmique rapide de résolution d'équations linéaires"*
- Cryptologie
- Chimie : *"les états stables des électrons sont modélisés par des vecteurs propres dont les valeurs propres correspondent à des états d'énergie"*
- *PageRank* : Basé sur l'approximation d'un vecteur propre de la matrice d'adjacence du graphe du Web. Voir ce lien

etc.

Remarques (1/2)

- L'ensemble des valeurs propres de $\mathbf{A}$ est noté $\lambda(\mathbf{A})$ et est appelé le *spectre* de $\mathbf{A}$
- Si $\mathbf{x}$ est un vecteur propre alors tout multiple $k\mathbf{x}$ l'est aussi
- Les vecteurs propres associés à $\lambda \neq 0$ sont dans $C(\mathbf{A})$
- Les vecteurs propres associés à $\lambda = 0$ sont les vecteurs de $N(\mathbf{A})$
- Si $\lambda = 0$ est une valeur propre alors $\mathbf{A}$ est singulière (non inversible)
- Si le rang de $\mathbf{A}$ est r, on aura $n - r$ *valeurs propres nulles*
- Les vecteurs propres associés à la valeur propre λ sont les vecteurs de $N(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$
- Si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ est singulière

Remarques (2/2)

- Tous les $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs propres de $\mathbf{I}$ avec la valeur propre associée $\lambda = 1$
- $\mathbf{A}^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$: Les vecteurs propres de $\mathbf{A}^k$ sont les mêmes que $\mathbf{A}$ tandis que les valeurs propres sont élevées à la puissance k (fonctionne aussi avec $k = -1$ si $\mathbf{A}$ est inversible)
- Commandes `MATLAB` :
  - La fonction `[S,`Λ`] = eig(A)` donne les valeurs propres de $\mathbf{A}$ dans la matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$ et les vecteurs propres comme les colonnes de $\mathbf{S}$. On ainsi $\mathbf{S\Lambda} = \mathbf{AS}$
  - Le programme `eigshow` permet d'illustrer le concept des valeurs/vecteurs propres

Outil : Déterminant des matrices 2×2 et 3×3

- $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
- $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi$

Polynôme caractéristique de A

- Le nombre λ est une valeur propre de la matrice $\mathbf{A}$ si et seulement si

$$p(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

- Autrement dit, les valeurs propres sont les racines du *polynôme caractéristique* $p(\lambda)$ de la matrice $\mathbf{A}$
- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors p est un polynôme de degré n
- On va donc avoir au plus n valeurs propres réelles

Trouver les valeurs et vecteurs propres de $\mathbf{A}$

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ et calculer $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$

Trouver les valeurs et vecteurs propres de A

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ et calculer $p(\lambda) = \det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}\right)$

2. Trouver les racines du polynôme caractéristique p pour obtenir les valeurs propres de $\mathbf{A}$

Trouver les valeurs et vecteurs propres de A

1. Former la matrice $\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}$ et calculer $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$

2. Trouver les racines du polynôme caractéristique p pour obtenir les valeurs propres de $\mathbf{A}$

3. Pour chaque valeur propre λ trouvée à la deuxième étape, résoudre

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad \text{ou} \quad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

pour trouver les vecteurs propres correspondants

Remarques (1/2)

- Il est possible que $p(\lambda)$ possède une racine de multiplicité supérieure à 1. Dans ce cas, il est possible que plusieurs vecteurs propres soient associés à cette valeur propre
- Il est aussi possible que $p(\lambda)$ possède une racine complexe et des vecteurs propres complexes
- Les opérations élémentaires sur les lignes **changent** les valeurs et les vecteurs propres

Remarques (2/2)

- Pour une matrice triangulaire, les valeurs propres sont ses éléments diagonaux

- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \text{trace } \mathbf{A}$$

- Si $\mathbf{A}$ est de taille $n \times n$ alors

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = \det \ \mathbf{A}$$

Multiplicités géométrique et algébrique

Si λ est une valeur propre de $\mathbf{A}$ alors il y a deux points de vue :

1. Géométrique : il existe des vecteurs non nuls tels que $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$
2. Algébrique : $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$

- Ceci correspond à deux nombres :
  1. *Multiplicité géométrique* (MG) : le nombre de vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ
  2. *Multiplicité algébrique* (MA) : la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique $p(\lambda)$
- Pour chaque valeur propre d'une matrice on a MG $\leq$ MA

Exemples

Illustrer les différents concepts sur les matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Et avec des valeurs propres complexes, pour $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

1. Valeurs et vecteurs propres

2. Diagonalisation d'une matrice

Théorème

Supposons que la matrice $\mathbf{A}$ de taille $n \times n$ possède n vecteurs propres linéairement indépendants $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ et soit $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$. On a alors

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\mathbf{S}^{-1}$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de $\mathbf{A}$

Ce théorème affirme que $\mathbf{A}$ peut être *diagonalisée* si ses vecteurs propres sont linéairement indépendants

Remarques

- La diagonalisation est possible seulement si les vecteurs propres sont linéairement indépendants
- Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{\Lambda}$ ont les mêmes valeurs propres mais pas les mêmes vecteurs propres
- Les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^k$ ont les mêmes vecteurs propres mais pas les mêmes valeurs propres

Théorème

Des vecteurs propres $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k$ d'une matrice qui correspondent à des valeurs propres distinctes (non égales) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ sont linéairement indépendants

Puissances

Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors $\mathbf{A} = \mathbf{S\Lambda S}^{-1}$ et $\mathbf{A}^k = \mathbf{S\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}$, où

$$\mathbf{\Lambda}^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & & & 0 \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Application :

Résolution d'équations de récurrence de la forme $\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{u}_k$, avec $\mathbf{u}_0$ fixé. Si $\mathbf{A}$ est diagonalisable alors la solution est

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{A}^k\mathbf{u}_0 = \mathbf{S\Lambda}^k\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_0$$

Théorème

Si MG $<$ MA alors la matrice n'est *pas* diagonalisable

Rappel : Pour chaque valeur propre d'une matrice on a MG $\leq$ MA