

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 11 : Gram-Schmidt et moindres carrés

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 9.1 vrai ou faux (★★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Les énoncés de cet exercice portent sur le système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Dire de chacun s'il est vrai ou faux et justifier.

1. L'erreur associée à une solution de ce système au sens des moindres carrés se calcule par $\|\mathbf{e}\| = \text{dist}(\mathbf{b}, \text{Proj}_{\text{Im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}))$.
2. Si $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_1\mathbf{R}_1$ et $\mathbf{A} = \mathbf{Q}_2\mathbf{R}_2$ sont deux factorisations QR distinctes de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{Q}_1^\top \mathbf{b}$ et $\mathbf{R}_2^{-1}\mathbf{Q}_2^\top \mathbf{b}$ sont deux solutions distinctes de ce système au sens des moindres carrés.
3. Si ce système est réalisable, alors toute solution au sens des moindres carrés engendrera une erreur nulle.
4. $\min_{\mathbf{x}} \|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\| = 0$ indique que le système est réalisable.

Exercice 9.15 (★)

Soient

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ici, la matrice $\mathbf{A}$ n'est pas plein rang colonne. Cet exercice explore ce qui survient quand on procède tout de même avec la méthode des moindres carrés en conservant $\mathbf{A}$ telle quelle.

1. Formuler les équations normales associées au système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.
2. En résolvant les équations normales, vérifier que ce système admet plusieurs solutions au sens des moindres carrés.
3. Donner deux solutions distinctes du système au sens des moindres carrés. Vérifier que ces deux solutions engendrent les mêmes erreurs quadratiques.

Exercice 9.16 (★)

Dans chacun des cas suivants, donner la solution au sens des moindres carrés du système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, L'erreur $\mathbf{e}$ associé à cette solution, ainsi que l'erreur $\|\mathbf{e}\|$.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

$$2. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$3. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 9.18 moindres carrés et systèmes réalisables (★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ et $\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$. Sans faire aucun calcul, donner les valeurs :

1. du projeté $\text{Proj}_{\text{Im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$;
2. d'une solution du système au sens des moindres carrés ;
3. de l'erreur associée à cette solution.

Exercice 9.19 (★)

Dans chacun des cas suivants, donner une solution au sens des moindres carrés du système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, L'erreur $\mathbf{e}$ associé à cette solution, ainsi que l'erreur $\|\mathbf{e}\|$.

$$1. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -20 \\ 10 \end{bmatrix};$$

$$2. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Exercice 9.20 moindres carrés à l'envers (★)

Soient

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1. Sans résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ au sens des moindres carrés, calculer $\text{Proj}_{\text{Im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b})$.
2. À l'aide du projeté calculé à la question précédente, résoudre $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ au sens des moindres carrés.

Exercice 9.21 moindres carrés et factorisation QR (★)

Dans chacun des cas suivants, une factorisation QR de la matrice $\mathbf{A}$ est proposée. L'utiliser pour donner une solution au sens des moindres carrés du système linéaire $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

$$1. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix};$$

$$2. \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Exercice 9.22 (★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle condition sur $\mathbf{A}$ garantit que les équations normales associées au système linéaire $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ admettent une solution unique ?

Exercice 9.23 coût du logement sur l'île de Montréal (★★)

Le but de cet exercice est d'établir une relation de dépendance affine entre la superficie d'un appartement et son loyer mensuel sur l'île de Montréal, à l'aide de quelques observations.

Les valeurs ci-dessous ont été observées pour cinq appartements :

Superficie (pi ²)	250	667	700	1,000	1,100
Loyer mensuel (\$)	600	2,150	1,325	1,190	2,950

Si s est la superficie d'un appartement et p son loyer, il s'agit donc de déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la relation $p = as + b$ décrive le mieux possible la tendance dictée par les données observées. Pour ce faire, soient

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 250 & 1 \\ 667 & 1 \\ 700 & 1 \\ 1000 & 1 \\ 1100 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

1. Montrer que le vecteur $\mathbf{A}\mathbf{x}$ exprime les valeurs des loyers prédites par le modèle affine pour chacun des appartements observés.
2. Formuler comme un problème de moindres carrés le calcul des coefficients a et b du modèle affine qui minimisent l'erreur de prédiction au regard des observations faites.
3. Résoudre ce problème pour obtenir les coefficients du modèle.
4. Donner l'erreur associée à la résolution. L'utiliser pour commenter la pertinence de cette modélisation, et proposer des pistes d'amélioration.

Exercice 9.24 (★)

Ajuster une droite aux trois points $(-1, 5)$, $(1, 13)$, et $(2, 17)$ de $\mathbb{R}^2$. Calculer l'erreur de la régression et conclure.

Exercice 9.25 (★★)

Ajuster un plan aux quatre points $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 0, 3)$, et $(0, -1, 4)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 10.1 vrai ou faux (★)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si $\mathbf{A}$ est une matrice orthogonale alors son déterminant est 1.
2. Si $\mathbf{AB}$ possède une Décomposition QR alors $\mathbf{B}$ aussi.
3. Si $\mathbf{AB}$ possède une Décomposition QR alors $\mathbf{A}$ aussi.
4. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique. Il est possible de trouver une base non-orthogonale de vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
5. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice symétrique avec n valeurs propres distinctes. Il est possible de trouver une base non-orthogonale de vecteurs propres de $\mathbf{A}$.
6. Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique et soit a, b, c ses valeurs propres, alors $\dim(\text{Ker } \mathbf{A} - a\mathbf{I}) + \dim(\text{Ker } \mathbf{A} - b\mathbf{I}) + \dim(\text{Ker } \mathbf{A} - c\mathbf{I}) = n$.
7. Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^3$ orthogonaux tels que $\mathbf{A} = \mathbf{v}_1\mathbf{v}_1^\top + \mathbf{v}_2\mathbf{v}_2^\top$. Alors $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.
8. Soit $\mathbf{A}$ une matrice symétrique et orthogonale, alors $\mathbf{A}^2 = \mathbf{I}$.

Exercice 10.3 (★)

Pour chaque matrice, identifier si le procédé de Gram-Schmidt peut être appliqué sur ses colonnes. Lorsque c'est le cas, indiquer le sous-espace vectoriel engendré. Si ce n'est pas le cas, justifier.

1. $\mathbf{I}_2$
2. $\begin{bmatrix} 8 & -1 & 8 \\ 9 & 1 & 7 \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
5. $\mathbf{O}_4$
6. $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

Exercice 10.5 décomposition QR 1 (★)

Effectuer la décomposition QR de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exercice 10.6 décomposition QR 2 (★)

Effectuer la décomposition QR de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$.

Exercice 10.7 décomposition QR 3 (★★)

Soit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer si la matrice $\mathbf{A}$ est de plein rang colonne.
2. Effectuer la décomposition QR de $\mathbf{A}$.

Exercice 10.8 (★★)

Une usine souhaite prédire le prix au kilo du chocolat à l'année 5 à partir des données $(1, 10)$, $(2, 20)$, et $(4, 15)$ correspondant aux années 1, 2 et 4.

1. Exprimer le problème comme une minimisation de l'erreur de la forme $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{b}\|$, en identifiant $\mathbf{A}$, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{b}$.
2. Trouver les réels c et d tels que $b(t) = dt + c$ soit la droite d'approximation par les moindres carrés, où t est le temps en années, et $b(t)$ le prix au kilo.
3. Estimer le prix du chocolat au kilo à l'année 5 à l'aide de la droite trouvée.

Exercice 10.9 (★★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{QR}$ une décomposition QR de $\mathbf{A}$.

1. Montrer que si $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{R})$ alors $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{Rx} \in \text{Ker}(\mathbf{Q})$.
2. Montrer que si $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ alors $\mathbf{x} \in \text{Ker}(\mathbf{R})$.
3. Montrer que $\text{Ker}(\mathbf{Q}) = \{\mathbf{0}\}$.

Exercice 10.11 transformée de Householder (★★)

Donner $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, et $\mathbf{Q}_3$ les matrices obtenues par la transformée de Householder à partir des vecteurs $\mathbf{u}_1 = (-1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, et $\mathbf{u}_3 = (1, 1)$, et vérifier que ces matrices sont bien orthogonales.

Exercice 10.12 transformée de Householder (★★)

Soit $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\mathbf{v}\| = 1$, et $\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\mathbf{v}\mathbf{v}^\top$.

1. Montrer que $\mathbf{H}$ est symétrique.
2. Avec $\mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1)$, construire la matrice $\mathbf{H}$.

- Vérifier que la matrice construite est orthogonale.

Exercice 10.13 (★★)

Soit la famille de vecteurs $\mathcal{D}_1 \subset \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\mathcal{D}_1 = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = (\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4)$$

- La famille $\mathcal{D}_1$ est-elle orthogonale ?
- Retirer un vecteur de $\mathcal{D}_1$ pour obtenir une base $\mathcal{D}_2$ orthogonale de $\mathbb{R}^3$.
- Transformer $\mathcal{D}_2$ en une base orthonormée $\mathcal{B}$.

- Calculer $\text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

- Calculer $\text{Proj}_{\text{Vect}\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_4\}} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$.

Exercice 10.14 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- Sans effectuer de calculs, $\mathbf{A}$ est-elle diagonalisable ?
- Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.15 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

- Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.16 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

- Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.17 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.18 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.19 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.20 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.21 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.22 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.23 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 10.24 (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 22 \end{bmatrix}$$

1. Trouver $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ et $\mathbf{D}$ diagonale tels que $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^\top$.

Exercice 6.23 image de $\mathbf{AA}^\top$ (★★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, l'objectif est de montrer pas à pas que

$$\text{Im}(\mathbf{AA}^\top) = \text{Im}(\mathbf{A}).$$

1. Montrer que $\text{Im}(\mathbf{AA}^\top) \subseteq \text{Im}(\mathbf{A})$.
2. Dans cette question on souhaite montrer l'inclusion réciproque $\text{Im}(\mathbf{A}) \subseteq \text{Im}(\mathbf{AA}^\top)$.
 - (a) Soit $\mathbf{y} \in \text{Im}(\mathbf{A})$, montrer qu'il existe $\mathbf{x}_1 \in \text{Ker}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{x}_2 \in \text{Im}(\mathbf{A}^\top)$, tels que $\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$.
 - (b) En déduire que $\mathbf{y} \in \text{Im}(\mathbf{AA}^\top)$ et finalement que $\text{Im}(\mathbf{AA}^\top) = \text{Im}(\mathbf{A})$.

Exercice 6.24 noyau de $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ (★★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. L'objectif est de montrer pas à pas que

$$\text{Ker}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{A}).$$

1. Montrer l'inclusion $\text{Ker}(\mathbf{A}) \subseteq \text{Ker}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})$.
2. Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer l'égalité scalaire

$$\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{A} \mathbf{x} = \|\mathbf{Ax}\|_2^2.$$

3. Conclure que $\text{Ker}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A}) = \text{Ker}(\mathbf{A})$.

Exercice 11.14 théorème spectral avec Gram-Schmidt (★★)

$$\text{Soit } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Déterminer sans aucun calcul si la matrice $\mathbf{A}$ est diagonalisable.
2. Trouver une matrice $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ orthogonale et une matrice diagonale $\mathbf{\Lambda}$ telles que $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^\top$.
3. Exprimer $\mathbf{A}$ comme la somme de deux matrices de rang un.