

10. Projections

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-28

v0

Plan

Projections

Projection sur une droite

Projection dans un sous-espace

Projections et bases orthogonales / orthonormales

Projections

Décompositions

Liens avec le manuel *alfa*

► 9.1 : Projections

Projections

Projection sur une droite

Projection dans un sous-espace

Projections et bases orthogonales / orthonormales

Projections

Décompositions

Projection sur une droite (1/2)

Soit L le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ correspondant à la droite engendrée par le vecteur non nul $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$: $L = \text{Vect}(\mathbf{a}) = \text{Im}([\mathbf{a}])$

- ▶ La **projection orthogonale** du vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sur L est le vecteur $\mathbf{p} \in L$ le plus proche de $\mathbf{b}$
- ▶ La projection de $\mathbf{b}$ sur L est $\mathbf{p} = \hat{x}\mathbf{a} = \mathbf{a}\hat{x}$ où $\hat{x} = \frac{\mathbf{a}^\top \mathbf{b}}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}}$
- ▶ On peut le voir aussi comme $\mathbf{p} = (\mathbf{u}^\top \mathbf{b})\mathbf{u}$ avec
 - ▶ $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ la **normalisation** de $\mathbf{a}$
 - ▶ $\mathbf{a} = \|\mathbf{a}\| \mathbf{u}$ et $\|\mathbf{u}\| = \mathbf{u}^\top \mathbf{u} = 1$ ($\mathbf{u}$ est **unitaire**)
- ▶ La droite allant de $\mathbf{p}$ à $\mathbf{b}$ est orthogonale à $\mathbf{a}$: $\mathbf{a} \perp \mathbf{e}$ avec $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p}$ ($\mathbf{e}$ est appelé l'**erreur**)
- ▶ **Exemple** : Avec $\mathbf{a} = (3, 2)$ et $\mathbf{b} = (5, 5)$, on a $\mathbf{p} = \frac{1}{13}(75, 50)$

Projection sur une droite (2/2)

- ▶ Matriciellement, le résultat précédent se reformule comme suit :

La projection de $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sur L est $\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{b}$, où $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est la *matrice de projection* symétrique suivante :

$$\mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^\top}{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}} = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top \text{ avec } \mathbf{u} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$$

$$\text{car } \mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}^\top\mathbf{b}}{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\frac{\mathbf{a}^\top\mathbf{b}}{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^\top}{\mathbf{a}^\top\mathbf{a}}\mathbf{b} = \mathbf{P}\mathbf{b}$$

- ▶ Exemple :

$$\text{Avec } \mathbf{a} = (3, 2) \text{ et } \mathbf{b} = (5, 5), \text{ on a } \mathbf{P} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Remarques

- ▶ $\mathbf{P}$ symétrique, $\text{rg}(\mathbf{P}) = 1$, $\text{Im}(\mathbf{P}) = \text{Im}([\mathbf{a}]) = L$
- ▶ Si $\mathbf{b}$ est orthogonal à $\mathbf{a}$, alors $\mathbf{a}^\top \mathbf{b} = 0$. La projection est $\mathbf{p} = \mathbf{0}$
- ▶ Si $\mathbf{b} = \mathbf{a}$, alors $\hat{x} = 1$. La projection de $\mathbf{a}$ sur lui-même donne $\mathbf{a}$: $\mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (mais $\mathbf{P} \neq \mathbf{I}$)
- ▶ Si $\mathbf{b} \in L$, alors $\mathbf{p} = \mathbf{b}$ et $\mathbf{e} = \mathbf{0}$
- ▶ Projeter une deuxième fois ne change rien :

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}\mathbf{P} = (\mathbf{u}\mathbf{u}^\top)(\mathbf{u}\mathbf{u}^\top) = \mathbf{u}(\mathbf{u}^\top \mathbf{u})\mathbf{u}^\top = \mathbf{u}\mathbf{u}^\top = \mathbf{P}$$

- ▶ Lorsque $\mathbf{P}$ projette sur un sous-espace ($\text{Im}(\mathbf{P})$), $\mathbf{I} - \mathbf{P}$ projette sur le sous-espace orthogonal ($\text{Ker}(\mathbf{P})$)
- ▶ **Exemple :**

Illustrer avec $\mathbf{a} = (3, 2)$, $\mathbf{b} = (5, 5)$, et $\mathbf{P} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

Projection dans un sous-espace

Soit $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n \in \mathbb{R}^m$ n vecteurs linéairement indépendants avec $n < m$ et W le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ de dimension n engendré par ces vecteurs

- ▶ Avec $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$\text{rg}(\mathbf{A}) = n \text{ et } W = \text{Im}(\mathbf{A})$$

- ▶ La *projection orthogonale* du vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ sur W est le vecteur $\mathbf{p} \in W$ le plus proche de $\mathbf{b}$
- ▶ La projection de $\mathbf{b}$ sur W est $\mathbf{p} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$ où

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$$

- ▶ $\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{b}$ où $\mathbf{P}$ est la *matrice de projection*

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Remarques (1/2)

- ▶ Le SÉL $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ n'a pas toujours de solution ($m > n$)
- ▶ La matrice $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ est symétrique et de taille $n \times n$. Elle est inversible car $\text{rg}(\mathbf{A}) = \text{rg}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})$ (preuve en exercice) et $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$
- ▶ Preuve de la formule de $\hat{\mathbf{x}}$: la droite allant de $\mathbf{p}$ à $\mathbf{b}$ est orthogonale au sous-espace $W = \text{Im}(\mathbf{A})$:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}^\top (\mathbf{b} - \mathbf{p}) &= \mathbf{A}^\top \mathbf{e} = \mathbf{0} = \mathbf{A}^\top (\mathbf{b} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}) \Rightarrow \mathbf{A}^\top \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \\ \Rightarrow \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b}\end{aligned}$$

- ▶ Pour trouver la projection $\mathbf{p}$, il faut résoudre le système $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^\top \mathbf{b}$ qui possède une solution unique

Remarques (2/2)

- ▶ Les matrices de projection $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ vérifient :
 $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}^\top = \mathbf{P}$, $\text{rg}(\mathbf{P}) = n < m$ ($\mathbf{P}$ est singulière)
- ▶ $W = \text{Im}(\mathbf{A}) = \text{Im}(\mathbf{P}) = \text{Im}(\mathbf{P}^\top)$: La projection sur W peut être vue comme la multiplication des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ par $\mathbf{A}$ ($\mathbf{A}\mathbf{x} \in W$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$) ou bien comme la multiplication des vecteurs de $\mathbb{R}^m$ par $\mathbf{P}$ ($\mathbf{P}\mathbf{b} \in W$ pour tout $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$)
- ▶ $\text{Ker}(\mathbf{P}) = \text{Ker}(\mathbf{P}^\top) = \text{Ker}(\mathbf{A}^\top)$
- ▶ $\mathbf{e} = \mathbf{b} - \mathbf{p}$ est orthogonal aux vecteurs de $W = \text{Im}(\mathbf{A})$. Il est donc dans les noyaux à gauche de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{P}$: $\mathbf{A}^\top \mathbf{e} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{P}^\top \mathbf{e} = \mathbf{0}$
- ▶ $\|\mathbf{e}\|$ représente une **erreur** mais aussi la **distance entre $\mathbf{b}$ et $\text{Im}(\mathbf{A})$**
- ▶ Décomposition de $\mathbb{R}^m$: $\mathbf{b} = \underbrace{\mathbf{p}}_{\in \text{Im}(\mathbf{A})} + \underbrace{\mathbf{e}}_{\in \text{Im}(\mathbf{A})^\perp = \text{Ker}(\mathbf{A}^\top)} \in \mathbb{R}^m$

La projection sur une droite est un cas particulier

Si $n = 1$, on retrouve les formules de la projection sur une droite dans $\mathbb{R}^m$:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$$

$$\mathbf{p} = \text{Proj}_{\text{Im}(\mathbf{A})}(\mathbf{b}) \rightarrow \mathbf{p} = \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{a})}(\mathbf{b})$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{b} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{P}\mathbf{b} = \hat{x}\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$$

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \hat{x} = \frac{\mathbf{a}^\top \mathbf{b}}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \in \mathbb{R}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m} \rightarrow \mathbf{P} = \frac{\mathbf{a}\mathbf{a}^\top}{\mathbf{a}^\top \mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

Projections

Projection sur une droite

Projection dans un sous-espace

Projections et bases orthogonales / orthonormales

Projections

Décompositions

Projection : Cas $n \leq m$ (1/2)

- ▶ Si les vecteurs $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ de $\mathbb{R}^m$ sont orthonormaux alors la matrice de projection sur le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ de dimension n engendré par ces vecteurs ($\text{Im}(\mathbf{Q})$) se simplifie et devient

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^\top = \mathbf{Q} \mathbf{Q}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

- ▶ $\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{Q}^\top \mathbf{b} = \mathbf{Q}^\top \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ avec $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$: La solution **au sens des moindres carrés** devient très facile à calculer : Plus besoin de $(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1}$

Projection : Cas $n \leq m$ (2/2)

$$\begin{aligned} \mathbf{p} = \mathbf{Q}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{Q}^\top \mathbf{b} &= [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^\top \mathbf{b} \\ \mathbf{q}_2^\top \mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^\top \mathbf{b} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1^\top \mathbf{b}) + \mathbf{q}_2(\mathbf{q}_2^\top \mathbf{b}) + \cdots + \mathbf{q}_n(\mathbf{q}_n^\top \mathbf{b}) \end{aligned}$$

$$= \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{q}_1)}(\mathbf{b}) + \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{q}_2)}(\mathbf{b}) + \cdots + \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{q}_n)}(\mathbf{b})$$

$$= \sum_{j=1}^n \mathbf{q}_j(\mathbf{q}_j^\top \mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{q}_j)}(\mathbf{b})$$

$$\in \text{Im}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbb{R}^m$$

Projection : Cas $n = m$

- ▶ $\text{Im}(\mathbf{Q}) = \mathbb{R}^n$ et la projection d'un vecteur $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ sur $\text{Im}(\mathbf{Q})$ est lui-même : $\mathbf{P} = \mathbf{I}$
- ▶ De plus, on a $\mathbf{p} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ et

$$\mathbf{b} = \mathbf{q}_1 \left(\mathbf{q}_1^\top \mathbf{b} \right) + \mathbf{q}_2 \left(\mathbf{q}_2^\top \mathbf{b} \right) + \cdots + \mathbf{q}_n \left(\mathbf{q}_n^\top \mathbf{b} \right)$$

$$= \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{q}_1)}(\mathbf{b}) + \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{q}_2)}(\mathbf{b}) + \cdots + \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{q}_n)}(\mathbf{b})$$

Ceci est la décomposition de $\mathbf{b}$ dans la base des $\mathbf{q}_j$, $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$

- ▶ **Exemple :**

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Décompositions dans une base orthogonale (1/2)

- ▶ Soit W un sev de $\mathbb{R}^m$ de dimension n , et dont une **base orthogonale** est $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$
- ▶ $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ n'est pas orthogonale mais $\mathbf{V}^\top \mathbf{V}$ est diagonale $n \times n$ avec chaque élément diagonal égal à $\|\mathbf{v}_j\|^2$, $j = 1, 2, \dots, n$
- ▶ La projection de **$\mathbf{b} \in W = \text{Im}(\mathbf{V})$** donnera alors

$$\mathbf{p} = \mathbf{b} = \frac{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{v}_2^\top \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 + \dots + \frac{\mathbf{v}_n^\top \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \mathbf{v}_n = \sum_{j=1}^n \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{v}_j)}(\mathbf{b})$$

(décomposition de $\mathbf{b} \in W$ dans $\mathcal{B}$)

Décompositions dans une base orthogonale (2/2)

Projection de $\mathbf{b}$ (pas forcément dans W) sur W :

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= \text{Proj}_W(\mathbf{b}) = \mathbf{V}(\mathbf{V}^\top \mathbf{V})^{-1} \mathbf{V}^\top \mathbf{b} \\ &= \sum_{j=1}^n \text{Proj}_{\text{Vect}(\mathbf{v}_j)}(\mathbf{b}) = \sum_{j=1}^n \frac{\mathbf{v}_j^\top \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \mathbf{v}_j\end{aligned}$$

et

$$\mathbf{b} = \text{Proj}_W(\mathbf{b}) + \text{Proj}_{W^\perp}(\mathbf{b}) = \mathbf{p} + \mathbf{e}$$

Résumé des différentes décompositions

$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (colonnes orthogonales) :

$$\mathbf{p} = \mathbf{v}_1 \frac{\mathbf{v}_1^\top \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_1\|^2} + \mathbf{v}_2 \frac{\mathbf{v}_2^\top \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_2\|^2} + \cdots + \mathbf{v}_n \frac{\mathbf{v}_n^\top \mathbf{b}}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \in \text{Im}(\mathbf{V}) \subseteq \mathbb{R}^m$$

$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (colonnes orthonormales) :

$$\mathbf{p} = \mathbf{q}_1(\mathbf{q}_1^\top \mathbf{b}) + \mathbf{q}_2(\mathbf{q}_2^\top \mathbf{b}) + \cdots + \mathbf{q}_n(\mathbf{q}_n^\top \mathbf{b}) \in \text{Im}(\mathbf{Q}) \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= \text{Proj}_{\text{Im}(\mathbf{V})}(\mathbf{b}) + \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathbf{V}^\top)}(\mathbf{b}) \\ &= \text{Proj}_{\text{Im}(\mathbf{Q})}(\mathbf{b}) + \text{Proj}_{\text{Ker}(\mathbf{Q}^\top)}(\mathbf{b}) = \mathbf{p} + \mathbf{e} \end{aligned}$$

Si $m = n$: $\text{Im}(\mathbf{V}) = \text{Im}(\mathbf{Q}) = \mathbb{R}^n$, $\text{Ker}(\mathbf{V}^\top) = \text{Ker}(\mathbf{Q}^\top) = \{\mathbf{0}\}$,

$\mathbf{p} = \mathbf{b}$, $\mathbf{e} = \mathbf{0}$, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n)$ base orthogonale de $\mathbb{R}^n$,

$(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n)$ base orthonormale de $\mathbb{R}^n$