

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 10 : Projections

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 9.2 projection sur une famille non orthogonale (**)

Soient $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ deux vecteurs d'un espace vectoriel quelconque, et notons $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Le but de cette question est de montrer par un contre-exemple simple dans $\mathbb{R}^3$, que si la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ n'est pas orthogonale, la décomposition de la projection orthogonale sous la forme

$$\text{Proj}_W(\mathbf{x}) = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x})$$

n'est plus valide. Soient

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ainsi que $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$.

1. Vérifier que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ n'est pas orthogonale.
2. Calculer le vecteur suivant, dont il faut montrer qu'il *n'est pas* égal à $\text{Proj}_W(\mathbf{x})$:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \text{Proj}_{\mathbf{u}_1}(\mathbf{x}) + \text{Proj}_{\mathbf{u}_2}(\mathbf{x}).$$

3. Calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_1)$.
4. Vérifier que

$$\hat{\mathbf{x}}_2 = \begin{bmatrix} 8/3 \\ 1/3 \\ 7/3 \end{bmatrix} \in W$$

et calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}}_2)$.

5. Conclure de ce qui précède, que $\hat{\mathbf{x}}_1$ n'est pas le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W .

Exercice 9.3 (*)

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soient également $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ tels que $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 2\sqrt{2}$ et $\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{w}') = 2\sqrt{3}$. Est-il possible que $\text{Proj}_W(\mathbf{x}) = \mathbf{w}'$?

Exercice 9.4 matrice de projection sur une image (**)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et l'application linéaire

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^m &\longrightarrow \text{Im}(\mathbf{A}) \\ \mathbf{y} &\longmapsto \text{Proj}_{\mathbf{A}}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

En supposant que $\text{rg}(\mathbf{A}) = n$, montrer que la matrice représentant T dans la base canonique est $\mathbf{A}(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^\top$.

Exercice 9.5 (★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u})$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W puis $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

1. $\mathbf{x} = (0, 1)$, $\mathbf{u} = (-1, 1)$;
2. $\mathbf{x} = (2, 2, 0)$, $\mathbf{u} = (1, 0, 1)$;
3. $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{u} = (0, 1, 0)$;
4. $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u} = (0, 0, 0) = \mathbf{0}_3$.

Exercice 9.6 (★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W puis $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

1. $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -2)$;
2. $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)$.

Exercice 9.7 (★★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W puis $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

1. $\mathbf{x} = (4, 2, 2, -1)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 3, -2, 0)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 1, 4, -4)$;
2. $\mathbf{x} = (0, 2, -1, 4)$, $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (0, -1, 2, 1)$.

Exercice 9.8 (★★)

On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$. Calculer à chaque fois le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W .

1. $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (2, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -2)$, $\mathbf{u}_3 = (3, 0, -1)$;
2. $\mathbf{x} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{u}_1 = (0, 2, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_3 = (-1, -4, -1)$.

Exercice 9.9 (★★)

Calculer le projeté orthogonal de $\mathbf{x}$ sur W avec :

1. $\mathbf{x} = (1, 1)$, $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 : 2w_1 + w_2 = 0\}$;
2. $\mathbf{x} = (1, 1, 2)$, $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : w_1 + w_2 = 0\}$;
3. $\mathbf{x} = (-1, 3, 1, 2)$, $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^4 : w_2 + 2w_3 - w_4 = 0\}$.

Exercice 9.10 (★)

Soient $\mathbf{x} = (1, -2, 1)$ et $W = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : w_1 + w_2 + w_3 = 0\}$. Calculer $\text{dist}(\mathbf{x}, W)$.

Exercice 9.11 (★★)

Soit V un espace vectoriel quelconque.

1. Soient $p \in \mathbb{N}, p \leq \dim(V)$ et $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ une famille orthogonale de V avec $\mathbf{u}_i \neq \mathbf{0}, i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. On note $W = \text{Vect}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p)$ et $P : \mathbf{x} \in V \mapsto P(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$. Montrer que P est une application linéaire.
2. *[Une légère extension.]* Soient W un sous-espace vectoriel quelconque de V et $P : \mathbf{x} \in V \mapsto P(\mathbf{x}) = \text{Proj}_W(\mathbf{x})$. Montrer que P est une application linéaire.

Exercice 9.13 (★★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ telle que $\text{rg}(\mathbf{A}) = n \leq m$. On note $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice de projection orthogonale sur $\text{Im}(\mathbf{A})$.

1. Montrer que $\text{Ker}(\mathbf{P}) = (\text{Im}(\mathbf{A}))^\perp$.
2. En déduire que $\text{rg}(\mathbf{P}) = n$.

Exercice 9.14 (★★)

Soit $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur normalisé. Montrer que la matrice associée à la projection orthogonale sur $\text{Vect}(\mathbf{u})$ est donnée par $\mathbf{u}\mathbf{u}^\top$.