0. Introduction

MTH1007

J. Guérin, N. Lahrichi, S. Le Digabel
Polytechnique Montréal

H2023

(v2)

Plan

1. Vecteurs et combinaisons linéaires

2. Longueur et produit scalaire

3. Matrices et vecteurs

Vecteurs en deux dimensions

Un *vecteur* bidimensionnel s'écrit :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

(par convention, un vecteur est toujours sous forme de colonne)

- v_1 est la *première composante* de $\mathbf{v}$
- v_2 est la *deuxième composante* de $\mathbf{v}$

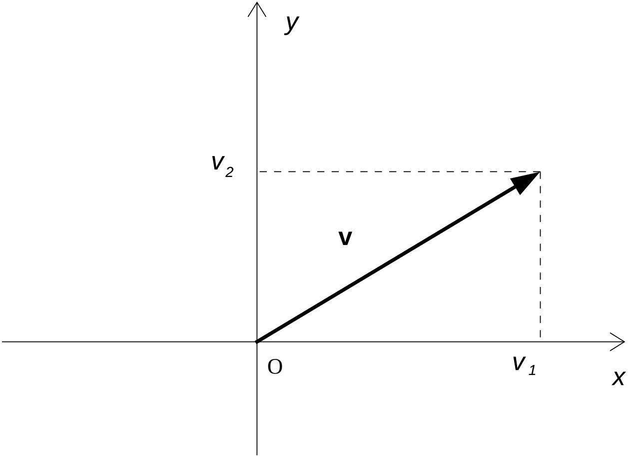
Notation :

- Dans les diapositives et dans le livre : $\mathbf{v}$
- À la main (tableau, copies, etc.) : $\vec{v}$ ou $\underset{\sim}{v}$

Pour gagner de l'espace, on peut écrire $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$

Plus tard, on pourra aussi écrire $\mathbf{v} = [v_1 \ \ v_2]^\top$ (sous forme de ligne)

Représentation graphique d'un vecteur 2D



Opérations sur les vecteurs en deux dimensions

Si $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ et $c \in \mathbb{R}$ alors on définit :

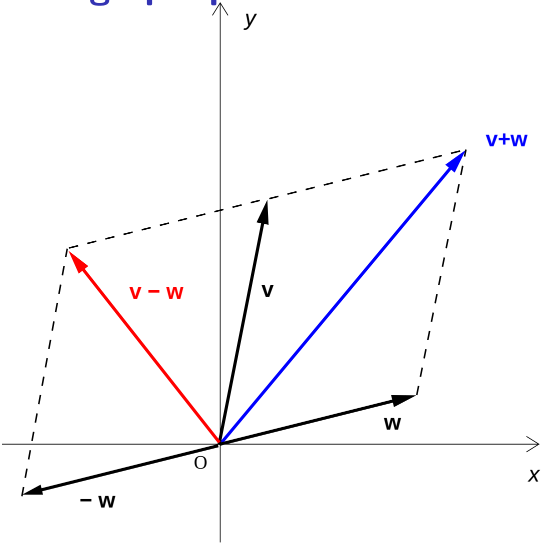
- L'addition :

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix}$$

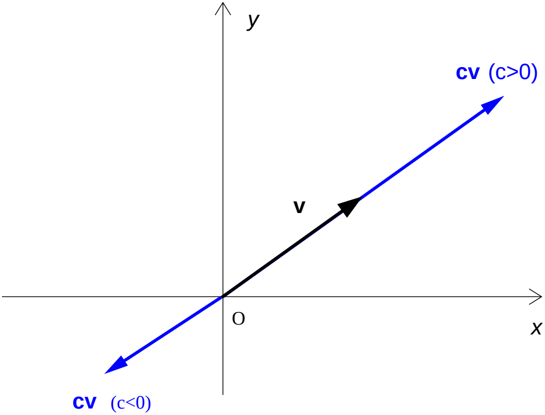
- La multiplication par un scalaire :

$$c\mathbf{v} = c \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cv_1 \\ cv_2 \end{bmatrix}$$

Représentation graphique : Addition et soustraction



Représentation graphique : Multiplication par un scalaire



Vecteurs en dimension n

Un vecteur en dimension n s'écrit :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \cdots v_n]^\top = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ les *composantes* de $\mathbf{v}$

Opérations sur les vecteurs

Si $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs de même dimension et si $c \in \mathbb{R}$ alors on définit les opérations

- d'addition :

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n) \in \mathbb{R}^n$$

- de multiplication par un scalaire :

$$c\mathbf{v} = (cv_1, cv_2, \ldots, cv_n) \in \mathbb{R}^n$$

Combinaisons linéaires

- Une *combinaison linéaire* de p vecteurs est une somme de la forme

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$$

  où $c_1, c_2, \ldots, c_p \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$

- Combinaisons linéaires importantes (pour $p = 2$) :

$$\begin{array}{ll} 1\mathbf{v} + 1\mathbf{w} & \text{(addition)} \\ 1\mathbf{v} - 1\mathbf{w} & \text{(soustraction)} \\ 0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{0} & \text{(vecteur nul)} \\ c\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = c\mathbf{v} & \text{(multiplication par un scalaire)} \end{array}$$

Questions importantes

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des vecteurs en trois dimensions (ou plus), quelle est la représentation de **toutes** leurs combinaisons linéaires ?

1. $c\mathbf{u}$? Une droite (sauf si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$)
2. $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$? En général, un plan (mais pas toujours)
3. $c\mathbf{u} + d\mathbf{v} + e\mathbf{w}$? En général, un espace tridimensionnel (mais pas toujours)

(pour tous réels c, d, e)

Indépendance et dépendance linéaire

Question : Donnés $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_p \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il une combinaison linéaire telle que

$$x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \cdots + x_p\mathbf{u}_p = \mathbf{0}\,?$$

Réponse : Oui, on choisit $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$

Question : Y a-t-il d'autres combinaisons linéaires ?

Réponse : Ça dépend des vecteurs $\mathbf{u}_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$

1. Si la seule combinaison linéaire des vecteurs qui donne $\mathbf{0}$ est celle avec $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$ alors on dit que les vecteurs sont *linéairement indépendants*
2. S'il y a plusieurs combinaisons linéaires des vecteurs qui donnent $\mathbf{0}$ alors on dit que les vecteurs sont *linéairement dépendants*

1. Vecteurs et combinaisons linéaires

2. Longueur et produit scalaire

3. Matrices et vecteurs

Produit scalaire et norme (longueur)

- Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ en dimension n est

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots + v_n w_n \in \mathbb{R}$$

- Plus tard on préfèrera la notation $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v}^\top \mathbf{w}$
- Ne pas utiliser le point "$\cdot$" pour la multiplication
- La *norme* (euclidienne) d'un vecteur $\mathbf{v}$ est

$$\|\mathbf{v}\| = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})^{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \in \mathbb{R}$$

- Un vecteur $\mathbf{v}$ est *unitaire* si $\|\mathbf{v}\| = 1$
- Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ alors le vecteur $\dfrac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$ est unitaire

Angle entre deux vecteurs

Géométriquement, l'angle θ entre deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est le plus petit des deux angles formés par les flèches qui les représentent :
On a donc $0 \leq \theta \leq \pi$

Algébriquement, on a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

On voit que

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ (angle aigu)
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ ($\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont perpendiculaires)
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi$ (angle obtus)

Deux inégalité importantes

Inégalité de Schwarz

Pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

Inégalité du triangle

Pour tous vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

Matrice

Une *matrice* de *taille* $m \times n$ est un tableau de nombres arrangés en m lignes et n colonnes :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Le nombre a_{ij}, pour $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ et $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, est le *coefficient* (ou *élément*) de A situé sur la i-ième ligne et la j-ième colonne. Il est aussi noté $A(i, j)$

Produit d'une matrice et d'un vecteur (1/2)

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont trois vecteurs avec $n = 3$, alors la *matrice* ayant pour colonnes ces vecteurs est

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, alors on définit

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (u_1, v_1, w_1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (u_2, v_2, w_2) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (u_3, v_3, w_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1x_1 + v_1x_2 + w_1x_3 \\ u_2x_1 + v_2x_2 + w_2x_3 \\ u_3x_1 + v_3x_2 + w_3x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Produit d'une matrice et d'un vecteur (2/2)

Autre point de vue :

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = x_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

- Premier point de vue : chaque composante de $A\mathbf{x}$ est le produit scalaire d'une **ligne** de A avec $\mathbf{x}$
- Deuxième point de vue : le produit $A\mathbf{x}$ est une combinaison linéaire des **colonnes** de A

Si $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alors on dit que A *agit sur le vecteur* $\mathbf{x}$ *pour donner le vecteur* $\mathbf{b}$

Systèmes d'équations linéaires (SÉL)

Si $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ alors on cherche $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ tel que

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

ou encore

$$\begin{bmatrix} x_1u_1 + x_2v_1 + x_3w_1 \\ x_1u_2 + x_2v_2 + x_3w_2 \\ x_1u_3 + x_2v_3 + x_3w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

ou encore

$$\begin{cases} x_1u_1 + x_2v_1 + x_3w_1 = b_1 \\ x_1u_2 + x_2v_2 + x_3w_2 = b_2 \\ x_1u_3 + x_2v_3 + x_3w_3 = b_3 \end{cases}$$