

0. Préambules

MTH1007

Sébastien Le Digabel
Polytechnique Montréal

A26

2026-07-16

v0

Introduction

Vecteurs

Vecteurs

Combinaisons linéaires

Produit scalaire et norme

Matrices

Matrices

Produit matrice-vecteur

Produit matrice-matrice

Transposée

Déterminant

Indépendance et dépendance linéaire

Introduction

- ▶ Ces diapositives sont à maîtriser avant le premier cours de la session
- ▶ Le prétest, qui aura lieu lors de la première séance de TD, portera sur
 - ▶ le bon usage des notations
 - ▶ les opérations vectorielles
 - ▶ les opérations matricielles
- ▶ Parties du manuel *alfa* à lire en complément :
 - ▶ Notations et terminologie
 - ▶ 1.1 : Vecteurs colonne
 - ▶ 1.2 : Matrices
 - ▶ 1.3 : Déterminant d'une matrice
 - ▶ 1.4 : Matrices inverses
 - ▶ 5.2.1 : Indépendance linéaire

Plan

Introduction

Vecteurs

- Vecteurs

- Combinaisons linéaires

- Produit scalaire et norme

Matrices

- Matrices

- Produit matrice-vecteur

- Produit matrice-matrice

- Transposée

- Déterminant

Indépendance et dépendance linéaire

Introduction

Vecteurs

Vecteurs

Combinaisons linéaires

Produit scalaire et norme

Matrices

Matrices

Produit matrice-vecteur

Produit matrice-matrice

Transposée

Déterminant

Indépendance et dépendance linéaire

Vecteurs 2D

Un *vecteur 2D* s'écrit :

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}$$

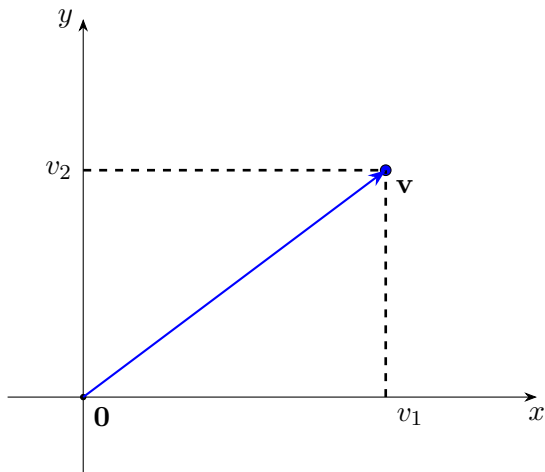
(par convention, un vecteur est toujours sous forme de colonne)

- ▶ v_1 est la *première composante* de $\mathbf{v}$
- ▶ v_2 est la *deuxième composante* de $\mathbf{v}$

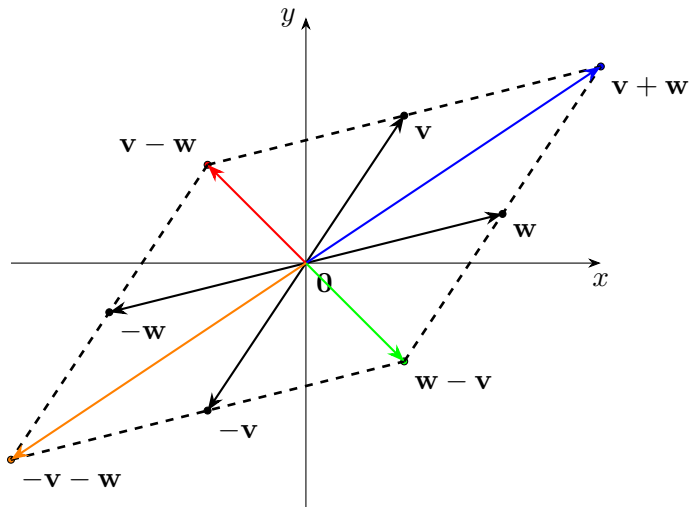
Notation :

- ▶ Dans les diapositives et dans le manuel : $\mathbf{v}$
- ▶ À la main (tableau, copies, etc.) : $\vec{v}$ ou v
- ▶ Pour gagner de l'espace, on peut écrire
 $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = [v_1 \ v_2]^\top$ (sous forme de ligne)

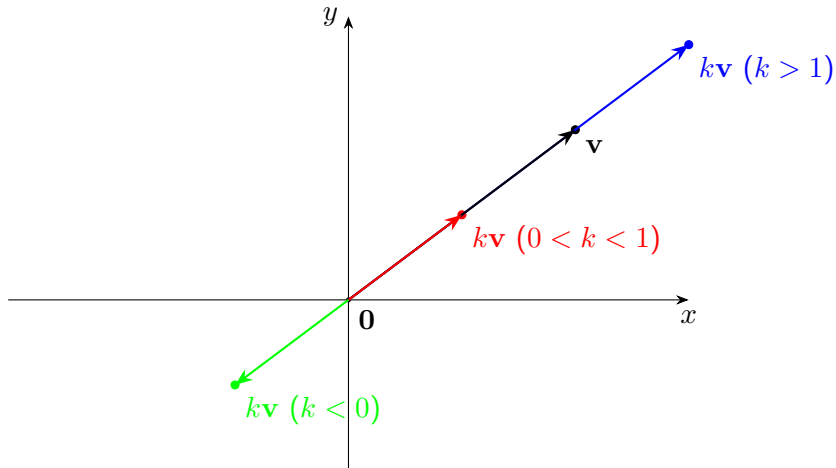
Représentation graphique d'un vecteur 2D



Repr. graphique : Addition et soustraction



Repr. graphique : Multiplication par un scalaire



Vecteurs de n composantes

Un vecteur de taille n s'écrit

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = [v_1 \ v_2 \ \cdots \ v_n]^\top = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

avec $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}$ les *composantes* de $\mathbf{v}$

Combinaisons linéaires

- ▶ Une *combinaison linéaire* de p vecteurs est une somme de la forme

$$\sum_{i=1}^p c_i \mathbf{v}_i = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_p \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$$

où $c_1, c_2, \dots, c_p \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$

- ▶ Combinaisons linéaires importantes (pour $p = 2$) :

$$1\mathbf{v} + 1\mathbf{w} \quad (\text{addition})$$

$$1\mathbf{v} - 1\mathbf{w} \quad (\text{soustraction})$$

$$0\mathbf{v} + 0\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (\text{vecteur nul})$$

Famille génératrice

Soit $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ une *famille* de vecteurs de $\mathbb{R}^n$

- ▶ L'*ensemble* des combinaisons linéaires de ces vecteurs est noté $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p) \subseteq \mathbb{R}^n$
- ▶ On dit que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ *engendre* (ou *génère*) $\text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ qui est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$
- ▶ Si $\mathbf{x} \in \text{Vect}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$, alors il existe des scalaires $c_1, c_2, \dots, c_p$ tels que $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p \in \mathbb{R}^n$

Questions importantes

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont des vecteurs 3D, quelle est la représentation de **toutes** leurs combinaisons linéaires ?

1. Vect($\mathbf{u}$) ? Une droite (sauf si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$)
2. Vect($\mathbf{u}, \mathbf{v}$) ? En général, un plan (mais pas toujours)
3. Vect($\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$) ? En général, l'espace 3D (mais pas toujours)

Produit scalaire et norme

- ▶ Le *produit scalaire* de deux vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ de taille n est
 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n \in \mathbb{R}$
- ▶ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{w}$ ¹ pour les vecteurs réels
- ▶ $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \mathbf{v}^* \mathbf{w}$ pour les vecteurs complexes
- ▶ La notation $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ est à proscrire car peut prêter à confusion
- ▶ La *norme* (euclidienne) d'un vecteur $\mathbf{v}$ est

$$\|\mathbf{v}\| = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle^{1/2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2} \in \mathbb{R}$$

- ▶ Un vecteur $\mathbf{v}$ est *unitaire* si $\|\mathbf{v}\| = 1$
- ▶ Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ alors le vecteur $\mathbf{v} / \|\mathbf{v}\|$ est unitaire

1. le texte en vert réfère à des notions vues plus loin

Produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$

Avec $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$, le produit vectoriel de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ est

$$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ est **normal** au plan généré par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (si $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont indépendants)

Introduction

Vecteurs

Vecteurs

Combinaisons linéaires

Produit scalaire et norme

Matrices

Matrices

Produit matrice-vecteur

Produit matrice-matrice

Transposée

Déterminant

Indépendance et dépendance linéaire

Matrice

Une *matrice* (réelle) de *taille* $m \times n$ est un tableau de réels arrangés en m lignes et n colonnes :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Le réel $a_{i,j}$ pour $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ est la *composante* (ou *élément*) de $\mathbf{A}$ située sur la i -ième ligne et la j -ième colonne. Il est aussi noté $\mathbf{A}(i, j)$

Produit d'une matrice et d'un vecteur (1/2)

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ sont trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$, alors la *matrice* ayant pour colonnes ces vecteurs est

$$\mathbf{A} = [\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}] = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Si $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, alors on définit

$$\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (u_1, v_1, w_1), (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ \langle (u_2, v_2, w_2), (x_1, x_2, x_3) \rangle \\ \langle (u_3, v_3, w_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_1x_1 + v_1x_2 + w_1x_3 \\ u_2x_1 + v_2x_2 + w_2x_3 \\ u_3x_1 + v_3x_2 + w_3x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Produit d'une matrice et d'un vecteur (2/2)

Autre point de vue :

$$\mathbf{Ax} = x_1\mathbf{u} + x_2\mathbf{v} + x_3\mathbf{w} = x_1 \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$$

Ainsi :

- ▶ Premier point de vue : chaque composante de $\mathbf{Ax}$ est le produit scalaire d'une **ligne** de $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{x}$
- ▶ Deuxième point de vue : le produit $\mathbf{Ax}$ est une combinaison linéaire des **colonnes** de $\mathbf{A}$

Définition des opérations matricielles

- **Addition** : Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices de même taille alors leur *somme* est la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ obtenue en additionnant les éléments correspondants de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$:

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \text{ pour } i \in \llbracket 1; m \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

- **Multiplication par un scalaire** : Si $k \in \mathbb{R}$ et $\mathbf{A}$ est une matrice alors $\mathbf{C} = k\mathbf{A}$ est la matrice obtenue en multipliant chaque élément de $\mathbf{A}$ par k :

$$c_{i,j} = ka_{i,j} \text{ pour } i \in \llbracket 1; m \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1; n \rrbracket$$

- **Multiplication** : Si $\mathbf{A}$ est une matrice de taille $m \times n$ et $\mathbf{B}$ une matrice de taille $n \times p$ alors leur *produit* est la matrice $\mathbf{C} = \mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ dont l'élément $c_{i,j}$ est égal à

$$\langle (i\text{-ième ligne de } \mathbf{A})^\top, j\text{-ième colonne de } \mathbf{B} \rangle$$

Propriétés des opérations matricielles

Lorsque que les opérations sont possibles, on a

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ commutativité
2. $k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}$ distributivité
3. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ associativité
4. $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$ distributivité à gauche
5. $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{A} + \mathbf{C}\mathbf{A}$ distributivité à droite
6. $\mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C}$ associativité
7. $\mathbf{A}^\alpha = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{\alpha \text{ termes}}$ α facteurs
8. $(\mathbf{A}^\alpha)(\mathbf{A}^\beta) = \mathbf{A}^{\alpha+\beta}, (\mathbf{A}^\alpha)^\beta = \mathbf{A}^{\alpha\beta}$ puissances
9. $\mathbf{I}\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I} = \mathbf{A}$ élément neutre (matrice **identité**)

Multiplication de matrices

- Pour que le produit $\mathbf{AB}$ soit défini, il faut que

nombre de colonnes de $\mathbf{A}$ = nombre de lignes de $\mathbf{B}$

- $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ même lorsque les deux produits existent

Multiplication de matrices : Quatre points de vue

- 1 L'élément (i, j) du produit $\mathbf{AB}$ est

$$\left\langle (i\text{-ième ligne de } \mathbf{A})^\top, j\text{-ième colonne de } \mathbf{B} \right\rangle$$

- 2 La j -ième colonne de $\mathbf{AB}$ est égale à $\mathbf{A}\mathbf{u}_j$ où $\mathbf{u}_j$ est la j -ième colonne de $\mathbf{B}$: Si

$$\mathbf{B} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{u}_p]$$

alors

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{A}\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{A}\mathbf{u}_p]$$

Multiplication de matrices : Quatre points de vue

- 3 La i -ième ligne de $\mathbf{AB}$ est égale à $\mathbf{v}_i^\top \mathbf{B}$ où $\mathbf{v}_i^\top$ est la i -ième ligne de $\mathbf{A}$:

$$\text{Si } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \\ \mathbf{v}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \end{bmatrix} \text{ alors } \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^\top \mathbf{B} \\ \mathbf{v}_2^\top \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^\top \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

- 4 Par blocs colonnes $\times$ lignes :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \text{colonne 1 de } \mathbf{A} \times \text{ligne 1 de } \mathbf{B} \\ &+ \text{colonne 2 de } \mathbf{A} \times \text{ligne 2 de } \mathbf{B} \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Exercice 1 : Multiplier $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ par $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Multiplication par blocs

Il est parfois utile d'effectuer la multiplication de matrices par blocs comme dans l'exemple suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} & \mathbf{B}_{13} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} & \mathbf{B}_{23} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{11}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{23} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{11} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{21} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{12} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{22} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{B}_{13} + \mathbf{A}_{22}\mathbf{B}_{23} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Attention à certains pièges

- ▶ $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$ n'implique pas nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ ou $\mathbf{B} = \mathbf{O}$:

Exemple avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- ▶ $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ n'implique pas nécessairement $\mathbf{A} = \mathbf{I}$:

Exemple avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- ▶ On peut avoir $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ et $\mathbf{B} \neq \mathbf{C}$:

Exemple avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

Matrices inverses

Définition

Une matrice carrée $\mathbf{A}$ est *inversible*, ou *non singulière*, s'il existe une matrice $\mathbf{A}^{-1}$ telle que $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$

Théorème

Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des matrices inversibles de même taille alors $\mathbf{AB}$ est inversible et

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

Transposée d'une matrice

Définition

Si $\mathbf{A}$ est une matrice de taille $m \times n$ alors sa *transposée* est la matrice $\mathbf{A}^\top$ de taille $n \times m$ obtenue en interchangeant les lignes et les colonnes de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}^\top(i, j) = \mathbf{A}(j, i) \text{ pour tout } i \in \llbracket 1; n \rrbracket \text{ et } j \in \llbracket 1; m \rrbracket$$

Propriétés des transposées

1. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top$
2. $(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$
3. Si $\mathbf{A}$ est inversible alors $\mathbf{A}^\top$ l'est aussi et $(\mathbf{A}^\top)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^\top$
4. $(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$
5. La transposée d'une triangulaire inférieure (supérieure) est triangulaire supérieure (inférieure)

Transposée et produit scalaire

Soient $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ des vecteurs de taille n :

- ▶ $\mathbf{x}^\top \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ est le *produit scalaire* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est un réel)
- ▶ $\mathbf{y}\mathbf{x}^\top$ est le *produit extérieur* de $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ (c'est une matrice de taille $n \times n$)
- ▶ $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \|\mathbf{x}\|^2$

Matrices symétriques

- ▶ Une matrice **carrée** $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est **symétrique** si $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$
- ▶ Si $\mathbf{A}$ est symétrique, $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$
- ▶ Toute matrice diagonale est symétrique
- ▶ Si $\mathbf{A}$ est symétrique et **inversible** alors $\mathbf{A}^{-1}$ est aussi symétrique
- ▶ Si $\mathbf{R}$ est une matrice de taille $m \times n$ alors $\mathbf{R}\mathbf{R}^\top \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $\mathbf{R}^\top \mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sont des matrices carrées symétriques

Déterminant des matrices 2×2 et 3×3

$$\blacktriangleright \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} &= aei + dhc + gbf - gec - ahf - dbi \\ &= a(ei - hf) - b(di - gf) + c(dh - ge) \\ &= a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Déterminant des matrices $n \times n$ pour $n \geq 2$

avec $\mathbf{A}_{i,j}$ la sous-matrice de $\mathbf{A}$ obtenue en supprimant la i -ième ligne et la j -ième colonne de $\mathbf{A}$ et $c_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\mathbf{A}_{i,j})$:

- Développement suivant la ligne i de $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} c_{i,j}$$

- Développement suivant la colonne j de $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} c_{i,j}$$

Exercice

$$\text{Montrer que } \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 8 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -12$$

Propriétés

- ▶ Le déterminant n'est défini que pour des matrices carrées
- ▶ $\mathbf{A}$ inversible $\iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$
- ▶ Déterminant = $\pm$ produit des pivots (si la matrice est inversible)
= produit des valeurs propres
- ▶ Si $\mathbf{A}$ triangulaire : Déterminant = produit des éléments diagonaux
- ▶ $\det(\mathbf{A}^\top) = \det(\mathbf{A})$
- ▶ $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$

Introduction

Vecteurs

Vecteurs

Combinaisons linéaires

Produit scalaire et norme

Matrices

Matrices

Produit matrice-vecteur

Produit matrice-matrice

Transposée

Déterminant

Indépendance et dépendance linéaire

Indépendance linéaire (1/2)

- ▶ Les vecteurs $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ sont *linéairement indépendants* si $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$ implique que $x_i = 0$ pour chaque $i = 1, 2, \dots, p$
- ▶ On dit alors que la *famille* $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p)$ est *libre*, ou que l'*ensemble* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ est *indépendant*
- ▶ S'il existe une combinaison linéaire des $\mathbf{v}_i$ avec des coefficients non nuls qui donne $\mathbf{0}$ alors ces vecteurs sont *linéairement dépendants* (la même famille est alors dite *liée*)

Indépendance linéaire (2/2)

- ▶ Une famille d'au moins deux vecteurs est liée si et seulement si au moins l'un de ses vecteurs est combinaison des autres (et pas forcément tous !)
- ▶ Avec $p \geq 2$, si $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ et si la famille est liée, alors il existe $j > 1$ tel que $\mathbf{v}_j$ est combinaison des vecteurs précédents
- ▶ Une famille contenant le vecteur nul est nécessairement liée