

MTH1007 — Algèbre linéaire pour ingénieurs

Série 0 : Préambules

Exercices (énoncés)

Les numéros renvoient au manuel [alfa](#) (série d'exercices.numéro).

Exercice 0.1 valide ou invalide ? (★)

Soient A un ensemble de vecteurs, F une famille de vecteurs, et $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs. Parmi les expressions suivantes, déterminer lesquelles sont valides.

- | | | |
|--|-------------------------------------|---|
| 1 $\mathbf{x} \in A$; | 9 $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^2$ | 17 $\mathbf{x} = [1 \ 2]$; |
| 2 $\mathbf{x} \in F$; | 10 $\mathbf{x} = \mathbb{R}^2$ | 18 $\mathbf{x} = [1 \ 2]^\top$; |
| 3 $\mathbf{x} \subseteq A$; | 11 $\mathbf{x} = (1 \ 2)$; | 19 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; |
| 4 $\mathbf{x} \subseteq F$; | 12 $\mathbf{x} = (1 \ 2)^\top$; | 20 $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}^\top$. |
| 5 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = A$; | 13 $\mathbf{x} = (1, 2)$; | |
| 6 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \in A$; | 14 $\mathbf{x} = (1, 2)^\top$; | |
| 7 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} \subseteq A$; | 15 $\mathbf{x} = [1, 2]$; | |
| 8 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$; | 16 $\mathbf{x} = [1, 2]^\top$; | |

Exercice 0.2 ensembles et familles : repérage et réécriture (★)

- Pour chacune des écritures suivantes, préciser si elle désigne un ensemble ou une famille, puis la réécrire en respectant les conventions :
 - ▷ $(5, 2, 5)$;
 - ▷ $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3\}$;
 - ▷ $\{p, p+1, \dots, n\}$.
- Noter sous forme compacte l'ensemble des entiers de -3 à 4 (bornes incluses) en utilisant la notation $\llbracket \cdot \rrbracket$.
- Dire si la base canonique $\mathcal{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ est un ensemble ou une famille.

Exercice 0.3 opérations sur ensembles et familles (★)

Soient $A = \{1, 3, 5\}$ et $B = (1, 3, 3, 4)$.

- Préciser pour chacun s'il s'agit d'un ensemble ou d'une famille.
- Déterminer :
 - (a) $A \cup B$;

- (b) $A \cap B$;
- (c) $B \setminus A$;
- (d) $A \setminus B$.

Exercice 0.4 bon usage de l'opérateur $\text{Vect}(\cdot)$ (★)

Soient A et B deux ensembles, F et G deux familles, et $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ deux vecteurs. Parmi les expressions suivantes, déterminer lesquelles sont valides.

- 1 $\text{Vect}(B) = A$;
- 2 $\text{Vect}(F) = A$;
- 3 $\text{Vect}(F) = G$;
- 4 $\text{Vect}(A) = F$;
- 5 $\text{Vect}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in A$;
- 6 $\text{Vect}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \subset A$;
- 7 $\text{Vect}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = A$;
- 9 $\text{Vect}((\mathbf{x}, \mathbf{y})) = A$;
- 10 $\text{Vect}\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} = A$.

Exercice 0.5 appartenance et inclusion – ensembles (★)

Soient les ensembles $A = \{1, 2, 4, 6\}$ et $B = \{2, 4\}$. Indiquer à l'aide des opérateurs d'appartenance et d'inclusion si un lien existe entre chacune des paires d'éléments suivantes :

- 1. 2 et B ;
- 2. $\{2\}$ et A ;
- 3. 6 et B ;
- 4. $\{1, 6\}$ et A ;
- 5. $\{1, 3\}$ et A ;
- 6. A et B .

Exercice 0.6 appartenance et inclusion – familles (★)

Soient les familles $F = (1, 2, 4, 6)$ et $G = (2, 4)$. Indiquer à l'aide des opérateurs d'appartenance et d'inclusion si un lien existe entre chacune des paires d'éléments suivantes.

- 1. 2 et G ;
- 2. (2) et F ;
- 3. $\{2\}$ et F ;
- 4. F et G ;

5. $(4, 2)$ et F ;
6. $(1, 2, 2, 4, 6)$ et F .

Exercice 0.7 appartenance et inclusion – familles de vecteurs (**)

Soient les vecteurs $\mathbf{u}_1 = (-1, 0, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 0, -1)$, et $\mathbf{u}_3 = (2, 0, 0)$, et les deux familles $F = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ et $G = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3)$.

Indiquer à l'aide des opérateurs d'appartenance et d'inclusion si un lien existe entre chacune des paires d'éléments suivantes.

1. $\mathbf{u}_3$ et G ;
2. -1 et $\mathbf{u}_2$;
3. $(\mathbf{u}_2)$ et F ;
4. $\{\mathbf{u}_2\}$ et F ;
5. F et G ;
6. $(\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2)$ et F ;
7. $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ et F .

Exercice 1.1 Vrai ou faux ? (*)

Les énoncés suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Soit $\mathbf{x}$ un vecteur réel. On a alors $\mathbf{x}^\top \mathbf{x} \geq 0$.
2. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans $\mathbb{R}^{m \times n}$. On a $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^2 = \mathbf{A}^2 + 2\mathbf{AB} + \mathbf{B}^2$.
3. Toute matrice triangulaire est inversible.
4. Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée. Alors la matrice $\mathbf{A}^2$ est symétrique.
5. Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans $\mathbb{R}^{n \times n}$. Si $\mathbf{AB}$ est inversible, alors $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont inversibles.
6. Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ des matrices inversibles de $\mathbb{R}^{n \times n}$. La matrice par blocs $\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ est inversible et son inverse est donnée par $\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} & \mathbf{C}^{-1} \\ \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{D}^{-1} \end{bmatrix}$.

Exercice 1.2 transposée d'un produit de plus de deux matrices (*)

Soient $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_p$ des matrices carrées de même taille. Montrer que

$$(\mathbf{A}_1^\top \mathbf{A}_2^\top \cdots \mathbf{A}_p^\top)^\top = \mathbf{A}_p \mathbf{A}_{p-1} \cdots \mathbf{A}_1 .$$

Exercice 1.3 (*)

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

1. Vérifier que $\mathbf{A}\mathbf{b} = \mathbf{c}$;
2. Écrire $\mathbf{c}$ comme une combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{A}$;

Exercice 1.4 (★)

Exprimer le produit $\mathbf{A}\mathbf{x}$ comme une combinaison linéaire des colonnes de $\mathbf{A}$, avec $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Exercice 1.5 (★)

Exprimer la combinaison linéaire suivante comme le produit d'une matrice $\mathbf{A}$ et d'un vecteur $\mathbf{x}$:

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Exercice 1.6 (★)

Soient $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer la norme de ces trois vecteurs.
2. Calculer $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ et $\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle$ de deux façons différentes.
3. Sachant que $\mathbf{b} = \frac{3\sqrt{3}+3}{2}\mathbf{a} + 3\mathbf{c}$, en déduire $\langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle$.

Exercice 1.7 théorème de Pythagore (★★)

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2\|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{y}\|^2$.
2. Si, de plus, $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont orthogonaux, montrer que $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$.

Exercice 1.8 cas d'égalité de l'inégalité triangulaire (★★★)

Soient $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ non nuls.

1. Montrer que si $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ avec $\alpha > 0$ alors $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
2. Montrer que si $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ avec $0 > \alpha > -1$ alors $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|$.
3. Montrer que si $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$ alors $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ sont colinéaires en étudiant la norme de $\mathbf{y} - \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle}{\|\mathbf{x}\|^2} \mathbf{x}$.
4. Montrer que si $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ alors $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$.
5. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur la cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Exercice 1.9 équation d'un plan généré par deux vecteurs (★)

Soient $\mathbf{u} = (1, 2, 3)$ et $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Donner l'équation du plan $\text{Vect}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Exercice 1.10 produits et additions compatibles ? (★)

Soient les matrices et vecteurs suivants :

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}, \quad \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.$$

Pour chacune des expressions ci-dessous, indiquer si l'opération est bien définie. Si oui, préciser le type (matrice ou vecteur) et les dimensions du résultat. Sinon, expliquer pourquoi l'opération est impossible.

1. $\mathbf{Ax}$
2. $\mathbf{BA}$
3. $\mathbf{A} + \mathbf{y}$
4. $\mathbf{A}^\top \mathbf{y}$
5. $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}$

Exercice 1.11 (★)

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$.

1. Calculer $\mathbf{AB}$ selon les quatre points de vue du cours.
2. Calculer $\mathbf{BA}$ selon les quatre points de vue du cours.

Exercice 1.12 (★)

Soient les matrices et vecteurs suivants :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Pour chacune des expressions suivantes, déterminer si l'opération est bien définie. Si oui, préciser les dimensions du résultat et le calculer. Si non, expliquer pourquoi.

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B}^\top$

2. $(\mathbf{CB})^\top + \mathbf{A}$
3. $\mathbf{Au} + \mathbf{Bv}$
4. $\mathbf{C}(\mathbf{Au}) - 2\mathbf{v}$
5. $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^\top)\mathbf{u}$

Exercice 1.13 (★)

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos(b) & -\sin(b) \\ \sin(b) & \cos(b) \end{bmatrix}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\mathbf{AB}$.
2. Calculer $\mathbf{A}^2$.
3. Calculer $\mathbf{A}^n$.

Exercice 1.14 (★★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Trouver les matrices telles que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Exercice 1.15 (★★)

Soit $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ avec des 1 sur la surdiagonale et des 0 ailleurs. Calculer $\mathbf{A}^k$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.17 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Exprimer $\mathbf{A}$ en fonction de $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ et $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Exercice 1.18 (★)

Calculer les déterminants de $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
 et $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Exercice 1.22 (★★★)

Soit $\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 4 & 4 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 4 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. Montrer que $\det(A_{n+2}) = 4(\det(A_{n+1}) - \det(A_n))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire $\det(A_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 1.23 (★★)

Soient $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, et $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m}$.

1. Soit la matrice diagonale par blocs définie par $\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$.

Montrer que $\det(\mathbf{M}_1) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D})$.

2. Soit la matrice triangulaire par blocs définie par $\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$.

En supposant que $\mathbf{A}$ est inversible, montrer que $\det(\mathbf{M}_2) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{D})$.

Exercice 1.24 (★)

Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée qui contient une colonne nulle. En n'utilisant que la définition de la matrice inverse, montrer que $\mathbf{A}$ est singulière.

Exercice 1.25 (★)

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$.

1. La matrice $\mathbf{A}$ est-elle inversible ?
2. Calculer $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$. Cette matrice est-elle inversible ?
3. Calculer $\mathbf{A}^\top\mathbf{A}$. Cette matrice est-elle inversible ?
4. Calculer $(\mathbf{A}^\top\mathbf{A})^\top$.

Exercice 1.27 (★)

Justifier d'au moins trois façons différentes que la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

n'est pas inversible.

Exercice 1.28 (★★)

Soit $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 2 & -1 & k \\ 0 & k & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de k la matrice $\mathbf{A}_k$ n'est-elle pas inversible ?

Exercice 1.29 une histoire d'inverse ()**

Soient $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice inversible et $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, un vecteur colonne. Montrer que

$$(\mathbf{F}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{u}^\top)^{-1} = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{F}\mathbf{u}\mathbf{u}^\top\mathbf{F}}{1 + \mathbf{u}^\top\mathbf{F}\mathbf{u}} \quad (1)$$

Exercice 1.30 matrices nilpotentes et inversibilité ()**

Soit $\mathbf{A}$ une matrice telle qu'il existe n tel que $\mathbf{A}^n = 0$ avec $\mathbf{A}$ non nulle.

1. Donner un exemple en dimension 2 pour $n = 2$.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ n'est pas inversible.
3. Calculer et simplifier au maximum l'expression suivante

$$\sum_{i=0}^{n-1} (\mathbf{A}^i - \mathbf{A}^{i+1}).$$

4. Montrer que $(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 + \dots + \mathbf{A}^{n-1})$ est inversible.

Exercice 1.31 ()**

Soient les matrices définies par blocs :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ -\mathbf{D} & \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{D} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

avec $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. $\mathbf{A}$ est-elle triangulaire? S'il existe, donner son déterminant.
2. Calculer le produit $\mathbf{AB}$.
3. Donner l'inverse de $\mathbf{A}$.
4. Calculer $\mathbf{AC}$.

Exercice 1.32 ()**

Soit $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

1. Est-ce que $\mathbf{A}$ est inversible?
2. Montrer que $(\mathbf{A} - \mathbf{I}_3)(\mathbf{A} + \mathbf{I}_3) = \mathbf{O}_3$.
3. Soit $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice vérifiant $(\mathbf{B} + \mathbf{I}_n)(\mathbf{B} - \mathbf{I}_n) = \mathbf{O}_n$. Montrer que $\mathbf{B}$ est inversible et que son inverse est $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}$.

Exercice 1.33 (★★)

Montrer qu'une matrice antisymétrique a seulement des zéros sur sa diagonale.

Exercice 1.34 (★★)

Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux matrices et $\mathbf{x}$ un vecteur tels que $\mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}$. Peut-on en conclure que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$?

Exercice 1.35 (★★)

Soient $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ deux matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$.

1. Calculer la norme de Frobenius de ces matrices.
2. Vérifier que $|\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle| \leq \|\mathbf{A}\|_{\text{F}} \|\mathbf{B}\|_{\text{F}}$.