

Quelques classes de graphes

1. Les graphes parfaits

Définition

Un graphe G est parfait si pour tout sous-graphe induit G' de G on a $\chi(G') = \omega(G')$.

Théorème

Un graphe G est parfait si et seulement si son complémentaire \overline{G} est parfait

Ce théorème a été énoncé comme conjecture par Berge en 1960 et n'a été prouvé que 12 ans plus tard par Lovász.

Corollaire

Un graphe G est parfait si pour tout sous-graphe induit G' de G on a $\theta(G') = \alpha(G')$.

Définition

Un trou est un cycle impair sans corde avec au moins 5 sommets.

Un anti-trou est le graphe complémentaire d'un trou.

Définition

Un graphe $G=(V,E)$ est imparfait minimal si G n'est pas parfait et si $G[V-\{x\}]$ est parfait pour tout x dans V .

Théorème

Un graphe G est parfait si et seulement si il ne contient aucun trou et aucun anti-trou comme sous-graphe induit

Ce théorème a été énoncé comme conjecture par Berge en 1960 et n'a été prouvé que 42 ans plus tard par Maria Chudnovsky et Paul Seymour, en mai 2002.

La démonstration de ce théorème fait aujourd'hui 148 pages...

Corollaire

Un graphe G est imparfait minimal si et seulement si G est un trou ou un anti-trou.

Définition

Une paire d'amis est une paire de sommets (x,y) tel que toute chaîne sans corde reliant x à y a un nombre pair d'arêtes.

Théorème

Un graphe imparfait minimal ne contient pas de paire d'amis.

Corollaire

Si tous les sous-graphes induits de G qui ne sont pas des cliques contiennent une paire d'amis, alors G est parfait.

Applications

- Les graphes bipartis sont parfaits. En effet, soit $G=(V_1, V_2, E)$ un graphe biparti avec $|V_1| \geq |V_2|$. Si $|V_1|=1$ alors G est soit un sommet isolé (donc une clique à 1 sommet), soit 2 sommets isolés (qui forment trivialement une paire d'amis), soit une arête (et donc une clique à 2 sommets). Sinon, toute paire de sommets dans V_1 constitue une paire d'amis.
- Les graphes parfaitement ordonnables sont parfaits. En effet, soit G un graphe parfaitement ordonnable et soit $<$ un ordre parfait sur G . Soit F l'ensemble des paires (x,y) de sommets non adjacents tel que $x < y$ et $N(x) \cap N(y) \neq \emptyset$. Soit finalement (a,b) une paire minimale de F (c'est-à-dire une paire telle que pour tout (x,y) dans F on a $a < x$ ou $a=x$ et $b < y$). On peut montrer que (a,b) est une paire d'amis dans G .

2. Les graphes de comparabilité

Définition

Un graphe est de comparabilité si on peut orienter ses arêtes de façon transitive, c'est-à-dire de telle sorte que s'il existe un arc de i vers j et un arc de j vers k , alors il existe également un arc de i vers k .

Théorème

Les graphes de comparabilité sont parfaits

Preuves

1. Les graphes de comparabilités sont parfaitement ordonnables car une orientation transitive induit un ordre parfait.
2. Le théorème de Dilworth nous dit que $\theta(G) = \alpha(G)$.

Algorithme permettant de déterminer si $G=(V,E)$ est un graphe de comparabilité

1. $F := \emptyset$
2. Tant que $F \neq E$ faire
Choisir une arête e dans $E-F$, donner une orientation à e et propager cette orientation pour assurer une orientation transitive de G .
Si une arête doit être orientée dans les deux sens : STOP, G n'est pas de comparabilité.
Sinon, rajouter à F toutes les arêtes nouvellement orientées. Si $F=E$ alors STOP : G est de comparabilité.

Etant donné qu'une orientation transitive d'un graphe de comparabilité induit un ordre parfait, on en déduit l'algorithme suivant de coloration minimale des sommets.

Algorithme de coloration minimale des sommets d'un graphe de comparabilité $G=(V,E)$.

1. Déterminer une orientation transitive de G (par exemple à l'aide de l'algorithme ci-dessus), et poser $i := 1$.
2. Tant qu'il existe encore des sommets à colorer faire
Donner la couleur i à toutes les sources, ôter ces sommets du graphe et poser $i := i+1$

Le chapitre sur les flots nous a de plus appris comment déterminer un stable maximum dans un graphe de comparabilité.

Algorithme de détermination d'un stable maximum dans un graphe de comparabilité $G=(V,E)$.

Voir théorème de Dilworth pour la détermination d'un ensemble incomparable de taille maximum dans un ensemble partiellement ordonné.

3. Les graphes de permutation

Définition

Un graphe G est de permutation s'il existe une permutation π des sommets telle que x est adjacent à y dans G si et seulement si $x < y$ et $\pi(y) < \pi(x)$ ou $y < x$ et $\pi(x) < \pi(y)$.

Propriété

Les graphes de permutation sont de comparabilité

Preuve

Soit G un graphe de permutation. Orientons ses arêtes de telle sorte que $x \rightarrow y$ si et seulement si $x < y$.

Si on a un arc de i vers j et un arc de j vers k , cela signifie que $i < j < k$ et $\pi(k) < \pi(j) < \pi(i)$. On a donc aussi une arête entre i et k et celle-ci est orientée de i vers k .

Théorème

Un graphe G est de permutation si et seulement si G et \bar{G} sont de comparabilité

Preuve

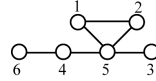
- (1) Supposons que G soit de permutation. On sait déjà que G est de comparabilité. Soit π la permutation associée à G et soit π' la permutation définie comme suit : $\pi'(x) = |V| - \pi(x) + 1$. Il est facile de voir que le graphe associé à π' est \bar{G} d'où on déduit que \bar{G} est aussi de permutation et donc de comparabilité.
- (2) Supposons que G et \bar{G} sont de comparabilité. Orientons transitivement G et \bar{G} et faisons l'union de ces deux graphes orientés. On obtient un graphe K complet orienté. Il est facile de vérifier que K ne contient aucun circuit. Notons $<_K$ l'ordre induit par cette orientation.
Soit maintenant H le graphe orienté obtenu à partir de K en inversant le sens de tous les arcs de G . Comme la nouvelle orientation de G est aussi transitive, H ne contient pas de circuit et on notera $<_H$ l'ordre des sommets de H .
À ce stade on sait que $x <_K y$ et $y <_H x$ si et seulement si x et y sont non adjacents dans \bar{G} et donc adjacents dans G .
Soit π la permutation définie comme suit : $\pi(x) =$ position du x^e sommet de K dans H . On peut vérifier que G est le graphe de permutation associé à π .

Remarquons qu'un graphe de permutation est un graphe d'intersection. En effet, soit G un graphe de permutation et π la permutation associée à G . Construisons la figure géométrique suivante : on considère deux droites parallèles à l'axe des x . Sur la première droite on positionne chaque point i à la coordonnée i alors que sur la deuxième droite on positionne chaque point i à la coordonnée $\pi(i)$. On relie ensuite par un segment chaque point de la première droite au point de même numéro sur la deuxième droite. Le graphe G n'est alors rien d'autre que le graphe d'intersection de ces segments.

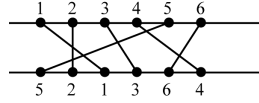
Exemple

Considérons π tel que $\pi(1)=3, \pi(2)=2, \pi(3)=4, \pi(4)=6, \pi(5)=1$ et $\pi(6)=5$.

Le graphe de permutation associé à π est



et la figure géométrique dont G est le graphe d'intersection des segments est



4. Les graphes d'intervalles

Rappel : Un graphe de ligne est le graphe d'intersection des arêtes d'un graphe

Un graphe de permutation est le graphe d'intersection de segments ayant leurs extrémités sur 2 droites parallèles.

Définition

Un graphe d'intervalles est le graphe d'intersection d'intervalles sur une droite.

Donc, étant donné un ensemble $E=\{E_1, \dots, E_n\}$ d'intervalles sur une droite, on lui associe le graphe d'intervalles $G=(V, E)$ où $V=\{1, \dots, n\}$ et deux sommets x et y sont reliés par une arête si et seulement si $E_x \cap E_y \neq \emptyset$.

Propriété

Un graphe d'intervalles est le graphe complémentaire d'un graphe de comparabilité.

Preuve

Soit $E=\{E_1, \dots, E_n\}$ l'ensemble des intervalles associés à un graphe d'intervalles $G=(V, E)$. Soient x et y deux sommets non adjacents dans G (et donc adjacents dans \overline{G}). Comme $E_x \cap E_y = \emptyset$, orientons l'arête $[x, y]$ de x vers y si et seulement si E_x est à gauche de E_y . Ceci définit une orientation transitive de \overline{G} .

Théorème

Un graphe G est d'intervalles si et seulement si \overline{G} est de comparabilité et G ne contient aucun C_4 comme sous-graphe induit. (Un C_4 est un cycle de longueur 4 sans corde, c'est-à-dire un carré.)

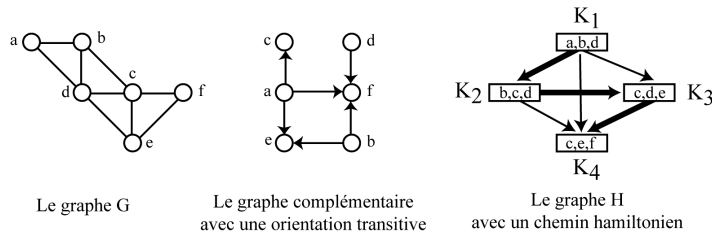
Preuve

- Supposons que G soit d'intervalles et soient E_1, \dots, E_n les intervalles associés aux sommets $1, \dots, n$ de G . On a déjà vu que \overline{G} est de comparabilité. De plus, si G contient un $C_4=(a, b, c, d, a)$, alors l'intervalle E_b doit avoir une intersection non vide avec E_a et E_c , ces deux derniers intervalles étant disjoints. On voit alors qu'il ne peut pas exister d'intervalles E_d ayant une intersection avec E_a et E_c , mais pas avec E_b .
- Supposons que \overline{G} soit de comparabilité et que G soit sans C_4 . Considérons une orientation transitive de \overline{G} . Soit X l'ensemble des cliques maximales de G . Construisons un graphe complet $H=(X, U)$ orienté comme suit. Soient K_i et K_j deux cliques maximales de X et soient u et v deux sommets non-adjacents tels que $u \in K_i$ et $v \in K_j$: on oriente l'arête $[K_i, K_j]$ de K_i vers K_j si et seulement si l'arête $[u, v]$ est orientée de u vers v dans \overline{G} . Remarquons que cette orientation de H est définie sans équivoque. En effet :
 - si il existe v et v' dans K_j non adjacents à u alors on ne peut pas avoir $u \rightarrow v$ et $v' \rightarrow u$ dans \overline{G} car sinon on devrait avoir $v' \rightarrow v$ dans \overline{G} ce qui n'est pas possible car v' et v font partie de K_j et ne sont donc pas reliés dans \overline{G} .
 - si on a $u \rightarrow v$ et $v' \rightarrow u'$ dans \overline{G} pour u et $u' \in K_i$ et v et $v' \in K_j$ on a alors $[u, v']$ et $[u', v]$ dans G pour ne pas tomber dans le cas ci-dessus, ce qui implique que G contient un $C_4=(u, v', u', v, u)$, contradiction.

Il existe donc un chemin hamiltonien dans H (c.f. devoir). Numérotions les cliques par indice croissant sur ce chemin hamiltonien. Pour tout sommet x de G définissons E_x comme le plus petit intervalle contenant tous les indices i tels que $x \in K_i$.

- Si on a une arête $[x, y]$ dans G alors il existe une clique K_i contenant x et y et on a donc $i \in E_x \cap E_y$.
- Si $E_x \cap E_y \neq \emptyset$ alors considérons $i \in E_x \cap E_y$ et soit $E_x=[a_x, b_x]$ et $E_y=[a_y, b_y]$. Montrons que $x \in K_i$. C'est évident si $i=a_x$ ou b_x . Si $a_x < i < b_x$ et $x \notin K_i$ alors il existe $z \in K_i$ tel que x et z sont non adjacents : mais alors $a_x < i$, $x \in K_{a_x}$ et $z \in K_i$ impliquent $x \rightarrow z$ dans \overline{G} alors que $i < b_x$, $x \in K_{b_x}$ et $z \in K_i$ impliquent $z \rightarrow x$ dans \overline{G} , contradiction. On montre de même que $y \in K_i$ et on déduit donc qu'il existe une arête entre x et y . Le graphe G est donc bien le graphe d'intersection des intervalles E_x .

Exemple :



On en déduit les intervalles $E_a=[1,1]$, $E_b=[1,2]$, $E_c=[2,4]$, $E_d=[1,3]$, $E_e=[3,4]$, $E_f=[4,4]$

Remarque

Le théorème ci-dessus nous indique que si G est un graphe d'intervalles alors il existe un ordre K_1, K_2, \dots, K_r de ses cliques maximales de telle sorte que si x fait partie de K_i et de K_j alors x fait partie des cliques K_i, K_{i+1}, \dots, K_j .

Définition

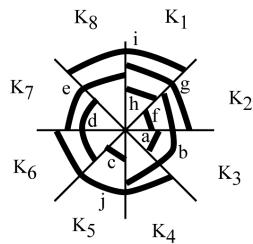
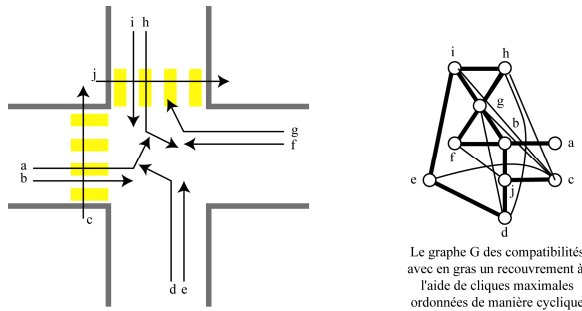
Le graphe d'intersection d'intervalles sur un cercle est appelé graphe d'intervalles circulaire.

Propriété

Dans un graphe d'intervalles circulaire les cliques maximales K_0, K_1, \dots, K_p peuvent être ordonnées de manière cyclique, c'est-à-dire de telle sorte que si $x \in K_i \cap K_j$ alors $x \in K_i, K_{i+1}, \dots, K_j$ ou $x \in K_j, K_{j+1}, \dots, K_i$ (les indices étant pris modulo p).

Exemple d'application : réglages des feux de signalisation à un carrefour

- 1) Construire le graphe des compatibilités G
- 2) Recouvrir les sommets à l'aide d'un ordre cyclique de cliques maximales dans G
- 3) Résoudre ensuite un problème de programmation linéaire



Les cliques maximales ordonnées de manière circulaire sont :

- $K_1=\{g, h, i\}$, $K_2=\{g, b, f\}$
- $K_3=\{a, b\}$, $K_4=\{b, j\}$
- $K_5=\{c, j\}$, $K_6=\{d, j\}$
- $K_7=\{d, e\}$ et $K_8=\{e, i\}$

Notons x_i la durée des mouvements de K_i . Supposons que l'on veuille avoir un cycle de C secondes, que l'on souhaite que chaque mouvement dure au moins s secondes et que l'on cherche à maximiser la durée totale des périodes vertes de chaque mouvement. On obtient alors le problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & x_3 + (x_2 + x_3 + x_4) + x_5 + (x_6 + x_7) + (x_7 + x_8) + x_2 + (x_1 + x_2) + x_1 + (x_8 + x_1) + (x_4 + x_5 + x_6) \\
 \text{s.c.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = C \\
 & x_3 \geq s \\
 & x_2 + x_3 + x_4 \geq s \\
 & x_5 \geq s \\
 & x_6 + x_7 \geq s \\
 & x_7 + x_8 \geq s \\
 & x_2 \geq s \\
 & x_1 + x_2 \geq s \\
 & x_1 \geq s \\
 & x_8 + x_1 \geq s \\
 & x_4 + x_5 + x_6 \geq s
 \end{aligned}$$

5. Les graphes triangulés

Définition

Un graphe est triangulé si tous ses cycles de plus de 3 sommets contiennent au moins une corde

Remarque

Les graphes d'intervalles sont donc triangulés

Définition

Un sous-ensemble W de sommets dans un graphe connexe $G=(V,E)$ est un séparateur si $G[V-W]$ n'est pas connexe.

Théorème

Un graphe connexe est triangulé si et seulement si tout séparateur minimal est une clique

Preuve

- (1) Supposons tout d'abord que tout séparateur est une clique. Soit $C=[x_1, x_2, \dots, x_k, x_1]$ ($k \geq 4$) un cycle dans G et soit W un séparateur minimal de x_1 et x_3 . W doit contenir x_2 et au moins un des sommets x_4, \dots, x_k . Comme W est une clique, il existe une corde dans C .
- (2) Supposons G triangulé et soit W un séparateur minimal. Supposons que W ne soit pas une clique. Soient $G_1=(V_1, E_1)$ et $G_2=(V_2, E_2)$ deux composantes connexes de $G[V-W]$ et soient x et y deux sommets non adjacents dans W . Comme W est minimal, x et y ont chacun au moins un voisin dans G_1 et dans G_2 . Soient a_1 et a_2 les voisins de x dans G_1 et G_2 , et soient b_1 et b_2 ceux de y dans G_1 et G_2 . Comme G_1 et G_2 sont connexes, il existe une chaîne reliant a_1 à b_1 dans G_1 et une chaîne reliant a_2 à b_2 dans G_2 . Il existe donc une chaîne C_1 sans corde reliant x à y dans $G[V_1 \cup W]$ ainsi qu'une chaîne sans corde C_2 reliant x à y dans $G[V_2 \cup W]$. L'union de C_1 et C_2 est un cycle sans corde contenant au moins 4 sommets, contradiction.

Définition

Un sommet est dit simplicial si son voisinage $N(x)$ est une clique.

Théorème

Tout graphe triangulé G autre qu'une clique contient au moins deux sommets simpliciaux non adjacents.

Preuve

Si G ne contient que deux sommets, alors G est constitué de deux sommets isolés qui sont simpliciaux non adjacents.

Supposons donc le théorème vrai pour tout graphe ayant moins de n sommets et soit $|V|=n$. Soit W un séparateur minimal et $G_1=(V_1, E_1)$ et $G_2=(V_2, E_2)$ deux composantes connexes de $G[V-W]$. On a vu que W est une clique.

- Si $G[V_1 \cup W]$ est une clique alors choisissons x dans V_1 : x est simplicial dans $G[V_1 \cup W]$.
- Sinon, par hypothèse d'induction, il existe deux sommets simpliciaux non adjacents dans $G[V_1 \cup W]$, et comme W est une clique, l'un de ces sommets qu'on appellera x est dans V_1 .

Dans chacun des deux cas on a déterminé un sommet x simplicial dans $G[V_1 \cup W]$. De même, on peut déterminer un sommet y simplicial dans $G[V_2 \cup W]$. Ces deux sommets x et y sont simpliciaux dans G et non-adjacents.

Définition

Un schéma d'élimination parfait est un ordre $v_1 < \dots < v_{|V|}$ des sommets tel que v_i est simplicial dans $G[\{v_i, \dots, v_{|V|}\}]$.

Théorème

Un graphe est triangulé si et seulement si il possède un schéma d'élimination parfait.

Preuve

- (1) Soit $v_1 < \dots < v_{|V|}$ un schéma d'élimination parfait et soit $C=[x_1, x_2, \dots, x_k, x_1]$ ($k \geq 4$) un cycle dans G . Sans perte de généralité on peut supposer que $x_1=v_i$ apparaît avant x_2, \dots, x_k dans le schéma d'élimination parfait. Mais alors x_2 est relié à x_k car x_1 est simplicial dans le graphe $G[\{v_i, \dots, v_{|V|}\}]$ qui contient x_2, \dots, x_k . Le cycle C a donc une corde.
- (2) Si G est triangulé on peut déterminer un schéma d'élimination parfait comme suit

Poser $i := 1$;

Tant que $V \neq \emptyset$ faire

 Choisir un sommet simplicial x dans le graphe résiduel. Mettre x en position i

 Ôter x de V et poser $i := i+1$

Théorème

Les graphes triangulés sont parfaitement ordonnables

Preuve

Montrons que l'ordre inverse d'un schéma d'élimination parfait est un ordre parfait. Orientons donc $x \rightarrow y$ si et seulement si $y < x$ dans le schéma d'élimination parfait. Considérons une chaîne sans corde $[a, b, c, d]$. Si $a \rightarrow b$ alors $b \rightarrow c$ car sinon b précéderait a et c dans le schéma d'élimination parfait et on devrait donc avoir une corde reliant a à c . Par un même raisonnement, l'orientation $b \rightarrow c$ implique $c \rightarrow d$. On ne peut donc pas avoir simultanément $a \rightarrow b$ et $d \rightarrow c$.

Algorithme de coloration d'un graphe triangulé $G=(V,E)$.

1. Déterminer un schéma d'élimination parfait $v_1 < \dots < v_{|V|}$
2. Colorer G séquentiellement selon l'ordre inverse $v_{|V|} < \dots < v_1$

Théorème

Si G est triangulé alors $\alpha(G)=\theta(G)$.

Preuve

Construisons un ensemble stable S à l'aide de l'algorithme suivant.

1. Déterminer un schéma d'élimination parfait $v_1 < \dots < v_{|V|}$
2. Poser $S := \emptyset$ et $k := 1$
Pour $i := 1$ à $|V|$ faire : si v_i n'a aucun voisin dans S alors rajouter v_i dans S , et poser $n(k) := i$ et $k := k+1$.

Soit K_j l'ensemble des voisins de $v_{n(j)}$ ($j=1, \dots, k$) qui succèdent à $v_{n(j)}$ dans le schéma d'élimination parfait. Par définition, K_j est une clique. Il n'est maintenant pas difficile de voir que K_1, \dots, K_k recouvrent tous les sommets de G . On a donc $k \leq \alpha(G) \leq \theta(G) \leq k$, d'où on déduit $\alpha(G)=\theta(G)$.

Remarquons de plus que la preuve ci-dessus donne des algorithmes pour déterminer un stable maximum dans G ainsi qu'un recouvrement des sommets de G à l'aide d'un nombre minimum de cliques.

Algorithmes permettant de déterminer si un graphe $G=(V,E)$ est triangulé

(a) Algorithme de Fulkerson et Gross (1969)

- (1) Poser $G' = G$;
- (2) Si G' est vide alors G est triangulé : STOP
- (3) Si G' ne contient pas de sommet simplicial alors G n'est pas triangulé
- (4) Ôter un sommet simplicial de G' et retourner à (2)

(b) Algorithme de Tarjan (1976)

- (1) Poser $N := \emptyset$ et $W := V$;
- (2) Si $W = \emptyset$ alors STOP : G est triangulé
- (3) Choisir le sommet x de W ayant le plus de voisins dans N .
- (4) Si les voisins de x dans N ne forment pas une clique alors STOP : G n'est pas triangulé
- (5) Rajouter x dans N , le retirer de W , et retourner à (2).

La justification de ce 2^e algorithme n'est pas évidente. On peut implanter cet algorithme de telle sorte qu'il soit linéaire.

6. Les graphes planaires

Rappels

- Un graphe est *planaire* s'il est possible de le représenter sur le plan de telle sorte que ses arêtes ne se croisent pas. Une telle représentation s'appelle un *graphe planaire topologique*.
- Dans un graphe planaire topologique connexe $G=(V,E)$, les contours des faces finies forment une base de cycles et le nombre de faces est égal à $|E| - |V| + 2$.
- Dans tout graphe planaire G , il existe un sommet de degré ≤ 5
- Si G est planaire alors $\chi(G) \leq 4$

Définition

Le genre g d'une surface est le nombre de trous dans cette surface. ($g=0$ pour une sphère, 1 pour un tore, 2 pour un toronnon, etc.)

Théorème (Ringel et Youngs, 1969)

Si G est représentable sans croisement sur une surface de genre ≥ 1 alors $\chi(G) \leq \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$

On peut ainsi par exemple déduire que K_8 n'est pas représentable sur un tore. La démonstration de ce théorème n'est pas applicable lorsque $g=0$: c'est dommage car cela aurait permis de démontrer facilement le théorème des 4 couleurs.

Propriété

Un graphe planaire $G=(V,E)$ connexe a au plus $3|V|-6$ arêtes. S'il est biparti il a au plus $2|V|-4$ arêtes.

Preuve

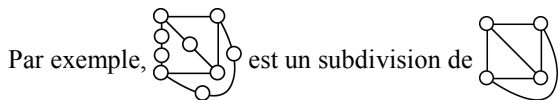
Le pourtour de chaque face a au moins 3 arêtes. En sommant les nombres d'arêtes des pourtours des faces on compte chaque arête deux fois et on obtient donc $2|E| \geq 3(|E|-|V|+2)$, d'où on déduit $|E| \leq 3|V|-6$.

Si le graphe est biparti, les pourtours des faces ont au moins 4 arêtes et on a donc $2|E| \geq 4(|E|-|V|+2)$ d'où $|E| \leq 2|V|-4$.

Ainsi, par exemple, la clique K_5 à 5 sommets n'est pas planaire car $|E|=10 > 9=3|V|-6$. De même, le graphe biparti complet $K_{3,3}$ avec 3 sommets à gauche et à droite n'est pas planaire car $|E|=9 > 8=2|V|-4$. (Remarquons que $|E|=9 \leq 12=3|V|-6$).

Définition

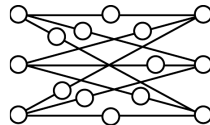
G' est une subdivision de G si G' est obtenu à partir de G en rajoutant des sommets sur des arêtes



Théorème de Kuratowski

Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient aucune subdivision de K_5 ou de $K_{3,3}$ comme sous-graphe partiel.

Exemple : le graphe ci-dessous n'est pas planaire car il est une subdivision de $K_{3,3}$. Remarquons qu'il est biparti mais que $|E|=18 \leq 26=2|V|-4$.



Algorithme de reconnaissance d'un graphe planaire dans lequel on connaît un cycle hamiltonien

Soit E' l'ensemble des arêtes ne faisant pas partie du cycle hamiltonien. Construisons un graphe $H=(E',F)$ tel que 2 sommets e et e' sont reliés par une arête si et seulement si e et e' sont 2 cordes du cycle hamiltonien qui « se coupent ».

G est alors planaire si et seulement si H est biparti. (Si H est biparti, on place les arêtes correspondant aux sommets de gauche à l'extérieur du cycle hamiltonien, et celles correspondant aux sommets de droite à l'intérieur du cycle.)

Définition

Soit G un graphe topologique planaire. Le graphe dual G^* de G est le graphe dont les sommets correspondent aux faces de G , et dans lequel deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les faces correspondantes dans G ont une arête en commun.

À chaque arête de G correspond une arête de G^* . À chaque cycle de G correspond un co-cycle de G^* . À chaque co-cycle de G correspond un cycle de G^* .

Propriété

$(G^*)^*=G$ pour tout graphe connexe planaire G

Remarques

- Si G_1 et G_2 sont deux graphes topologiques planaires isomorphes, alors G_1^* et G_2^* ne sont pas forcément isomorphes.
- Colorer les sommets de G planaire est équivalent à colorer les faces de G^* .
- On peut toujours rajouter des arêtes à G planaire de telle sorte que chaque face soit un triangle. Dans un tel cas, tous les sommets de G^* sont de degré 3.

Théorème

Soit G un graphe planaire topologique sans sommet de degré 1.

On peut colorer les faces de G en 2 couleurs si et seulement si tous les sommets sont de degré pair.

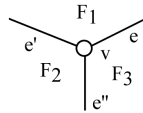
Théorème de Tait

Soit G un multi-graphe topologique planaire sans isthme et dont tous les sommets sont de degré 3.

Les faces de G sont colorables en 4 couleurs si et seulement si les arêtes de G sont colorables en 3 couleurs.

Preuve

- (1) Supposons que les faces de G soient colorées en 4 couleurs que nous coderons par $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. Considérons une arête quelconque e de G . Comme il n'existe pas d'isthme, cette arête sépare 2 faces de couleur x et y . Colorons e avec la couleur $(x+y) \bmod 2$ (le modulo étant pris sur chacune des 2 composantes de x et de y). En faisant de même pour toutes les arêtes, on obtiendra une coloration des arêtes avec les 3 couleurs $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$ (la couleur $(0,0)$ ne pouvant pas exister car une arête séparerait 2 faces de même couleur). De plus, deux arêtes adjacentes sont de couleur différente. En effet, soit $e=(v,x)$ et $e'=(v,y)$. Il existe alors $e''=(v,z)$ puisque le degré de chaque sommet est 3. Ces 3 arêtes séparent 3 faces F_1, F_2 et F_3 comme illustré ci-dessous. Soient a,b,c les couleurs des ces trois faces. La couleur de e est alors $(a+c) \bmod 2$ et celle de e' est $(a+b) \bmod 2$ et ces deux couleurs sont bien différentes car $b \neq c$ (car e'' sépare F_2 de F_3).



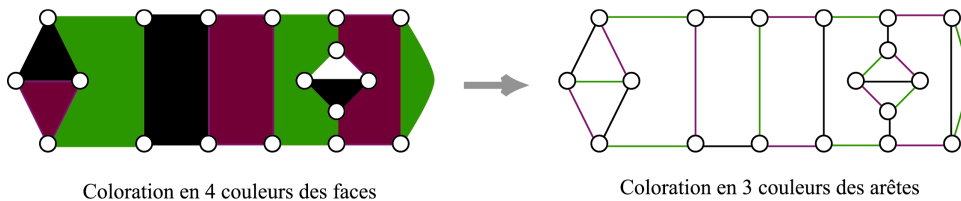
- (2) Supposons que les arêtes de G soient colorées en 3 couleurs a,b,c . Soit G_{ab} le graphe partiel de G ne contenant que les arêtes de couleur a ou b , et G_{bc} celui ne contenant que les arêtes de couleur b ou c . Comme G_{ab} et G_{bc} sont des unions de cycles pairs disjoints, tous leurs sommets sont de degré pair. On peut donc colorer les faces de G_{ab} ainsi que celles de G_{bc} en 2 couleurs 0 et 1.

Chaque face f de G fait partie d'une face f_{ab} de G_{ab} et d'une face f_{bc} de G_{bc} . Donnons à f la couleur (x,y) où x est la couleur de la face f_{ab} et y celle de f_{bc} . En faisant de même pour toutes les faces, on obtient une coloration des faces de G en 4 couleurs $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$.

Soient f et f' deux faces adjacentes dans G . Elles sont séparées par une arête. Cette arête fait partie de G_{ab} ou/et de G_{bc} . Les couleurs de f et de f' diffèrent donc par au moins une composante.

Illustration

- (1) À partir d'une coloration des faces en 4 couleurs (noir= $(1,1)$, rouge= $(0,1)$, vert= $(1,0)$, blanc= $(0,0)$), on obtient une coloration des arêtes de G en 3 couleurs.



- (2) À partir d'une coloration des arêtes en 3 couleurs a =noir, b =rouge, c =vert, on obtient une coloration des faces en 4 couleurs (noir= $(1,1)$, rouge= $(0,1)$, vert= $(1,0)$, blanc= $(0,0)$)

