Matroïdes

Définition

Soit E un ensemble fini et soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de E. Le couple (E,$\mathcal{F}$) est un **matroïde** si

(a) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(b) si $F \in \mathcal{F}$ et $F' \subseteq F$ alors $F' \in \mathcal{F}$

(c) si $F, F' \in \mathcal{F}$ avec $|F'|=|F|+1$, alors il existe $e \in F'-F$ tel que $F \cup \{e\} \in \mathcal{F}$.

Les éléments de $\mathcal{F}$ sont appelés ensembles **indépendants** de E

Propriété

Si (E,$\mathcal{F}$) est un matroïde et si $A \subset E$ alors (A,$\mathcal{F}_A$) en est également un, avec $\mathcal{F}_A=\{F \in \mathcal{F}$ tel que $F \subseteq A\}$. On dit que (A,$\mathcal{F}_A$) est le **matroïde partiel** de (E,$\mathcal{F}$) engendré par A.

Soit E un ensemble fini, soit $\mathcal{F}$ une famille de sous-ensembles de E, et soit $c : E \to \mathbb{R}_+$ une fonction. On est intéressé à déterminer un ensemble $F \in \mathcal{F}$ de coût c(F) maximum, où le coût d'un ensemble est le coût total de ses éléments. Considérons l'algorithme suivant

Algorithme GLOUTON

Ordonner les éléments de E de telle sorte que $E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ avec $c(e_1)\geq\ldots\geq c(e_n)$; Poser $F := \emptyset$;
Pour i=1 à n **faire**
  Si $F\cup\{e_i\}\in \mathcal{F}$ **alors** poser $F := F\cup\{e_i\}$;

Le résultat suivant caractérise les structures pour lesquelles l'algorithme glouton fournit une solution optimale

Théorème

Si $\mathcal{F}$ satisfait les propriété (a) et (b) ci-dessus alors les 3 affirmations suivantes sont équivalentes :

1) L'algorithme GLOUTON produit un ensemble $F \in \mathcal{F}$ de coût c(F) maximum, quel que soit $c : E \to \mathbb{R}_+$
2) $\mathcal{F}$ satisfait la propriété (c) (et (E,$\mathcal{F}$) est donc un matroïde)
3) si $E' \subseteq E$, $F,F' \in \mathcal{F}$ et F,F' sont tous deux maximaux au sens de l'inclusion dans E', alors $|F'|=|F|$.

Preuve

1) $\Rightarrow$ 2).

Soient $F, F' \in \mathcal{F}$ avec $|F'|=|F|+1$. Supposons qu'il n'existe pas $e \in F'-F$ tel que $F\cup\{e\}\in\mathcal{F}$. Considérons la fonction c suivante :

$$c(e) = \begin{cases} |F|+2 & \text{si } e \in F \\ |F|+1 & \text{si } e \in F'-F \\ 0 & \text{si } e \notin F \cup F' \end{cases}$$

L'algorithme GLOUTON produit une solution de poids $|F|(|F|+2) = (|F|+1)(|F|+1) -1 \leq c(F')-1$. Il n'est donc pas optimal, contradiction.

2) $\Rightarrow$ 3).

Soit $E'\subseteq E$ $F, F' \in \mathcal{F}$ tels que F,F' sont tous deux maximaux au sens de l'inclusion dans E', et $|F'|>|F|$. Soit F'' un sous-ensemble quelconque de F' tel que $|F''|=|F|+1$. Par 2), il existe $e\in F''-F$ tel que $F\cup\{e\}\in\mathcal{F}$. Donc F n'est pas maximal au sens de l'inclusion dans E', contradiction.

3) $\Rightarrow$ 1).

Soit $c : E \to \mathbb{R}_+$ et $F^* \in \mathcal{F}$ tel que l'algorithme GLOUTON produit un ensemble F avec $c(F)<c(F^*)$. On peut supposer que F* est maximal au sens de l'inclusion (alors que F l'est par construction). Par 3), nous savons que $|F|=|F^*|$. Notons $F=\{e_1,\ldots,e_p\}$ et $F^*=\{f_1,\ldots,f_p\}$, avec $c(e_i)\geq c(e_j)$ et $c(f_i)\geq c(f_j)$ pour tout j>i.
Par construction, $c(e_1) \geq c(f_1)$. Supposons qu'il existe i tel que $c(e_r) \geq c(f_r)$ r=1,…,i-1 et $c(e_i)<c(f_i)$. Soit E' l'ensemble des éléments e de coût $c(e)\geq c(f_i)$. L'ensemble $\{e_1,\ldots,e_{i-1}\}$ est maximal au sens de l'inclusion dans E' car s'il existe $e\in E'-\{e_1,\ldots,e_{i-1}\}$ tel que $\{e_1,\ldots,e_{i-1}, e\}\in\mathcal{F}$, alors $c(e) \geq c(f_i)>c(e_i)$, ce qui contredit le choix de l'algorithme GLOUTON. L'ensemble $\{f_1,\ldots,f_i\}$ est indépendant et est contenu dans un ensemble indépendant maximal dans E'. Ceci contredit 3).
On a donc $c(e_i) \geq c(f_i)$ pour tout i=1,…,p, ce qui contredit $c(F) <c(F^*)$.

Le dernière partie de la démonstration ci-dessus démontre également que lorsqu'on applique l'algorithme GLOUTON à un matroïde, alors l'ensemble indépendant obtenu à chaque itération est optimal parmi tous les ensembles indépendants de même cardinalité.

Notons également que l'algorithme GLOUTON peut servir à déterminer l'ensemble indépendant maximal de coût total minimum dans un matroïde $(E,\mathcal{F})$. En effet, soit $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$ la fonction de coût à minimiser, et soit C le plus grand des coûts dans E. Définissons $c'(e)=C-c(e)$. Comme tous les ensembles maximaux au sens de l'inclusion ont le même nombre d'éléments, on a $c'(F)=C|F|-c(F)$ pour tout indépendant maximal $F\in\mathcal{F}$. On peut donc maximiser c' au lieu de minimiser c. Ceci revient à changer la 1ère ligne de l'algorithme GLOUTON comme suit :

| Ordonner les éléments de E de telle sorte que $E=\{e_1,\ldots,e_n\}$ avec $c(e_1)\leq\ldots\leq c(e_n)$; Poser $F := \emptyset$;

Définition

Soit $(E,\mathcal{F})$ un matroïde et soit $E'\subseteq E$. Le **rang de E'**, noté rg(E') est la cardinalité du plus grand sous-ensemble indépendant dans E'. En d'autres termes,

$$rg(E') = \underset{F\subseteq E',F\in\mathcal{F}}{\text{Max}} |F| = \underset{F\in\mathcal{F}}{\text{Max}} |F\cap E'|$$

De plus, le rang de E est appelé **rang du matroïde**.

Définition

Soit $(E,\mathcal{F})$ un matroïde et soit $E'\subseteq E$. La **clôture** de E', noté cl(E') est le plus grand sous-ensemble $E''\supseteq E'$ de E tel que $rg(E'')=rg(E')$.

Théorème

La clôture cl(E') de E' est unique

Preuve

Soient A et B deux sous-ensembles de E maximaux au sens de l'inclusion tels que $rg(A)=rg(B)=rg(E')$ et $A\supseteq E'$, $B\supseteq E'$. Supposons $A\neq B$ et soit $e\in A-B$. On a $rg(B\cup\{e\})=rg(A)+1$ par maximalité de B.
Soit $F\in\mathcal{F}$ tel que $|F|=rg(E')$ et $F\subseteq E'$. Soit $F'\in\mathcal{F}$ tel que $|F'|=rg(E')+1$ et $F'\subseteq B\cup\{e\}$. Soit $F''=F\cup F'$.
Comme F n'est pas un indépendant de cardinalité maximale dans F'', il existe $f\in F'-F$ tel que $F\cup\{f\}\in\mathcal{F}$.
On a donc $f\notin B$ car sinon $F\subseteq E'\subseteq B$ et $f\in B \Rightarrow F\cup\{f\}\subseteq B \Rightarrow rg(B)>rg(E')$, contradiction.
On en déduit que $f=e$, et donc $F\cup\{f\}\subseteq A$ (car $F\subseteq E'\subseteq A$ et $e\in A$). Mais alors $rg(A)> rg(E')$, contradiction.

Corollaire $e\in cl(E') \Leftrightarrow rg(E'\cup\{e\})=rg(E')$

Définition

Soit $(E,\mathcal{F})$ un matroïde. Un sous-ensemble $E'\subseteq E$ est un **stigme** si $E'\notin\mathcal{F}$ et $E'-\{e\}\in\mathcal{F}$ pour tout $e\in E'$.

Théorème

Si $F\in\mathcal{F}$ et $F\cup\{e\}\notin\mathcal{F}$ pour $e\in E-F$, alors $F\cup\{e\}$ contient un unique stigme.

Preuve

Soit $F\in\mathcal{F}$ et soit $e\in E-F$ tel que $F\cup\{e\}\notin\mathcal{F}$. Supposons que $F\cup\{e\}$ contienne 2 stigmes distincts A et B , et que F soit de cardinalité minimale parmi les ensembles indépendants contredisant le théorème.
On a $e\in A\cap B$ car $A\notin\mathcal{F}$, $B\notin\mathcal{F}$, alors que $F\in\mathcal{F}$.
Si $A\neq B$ alors il existe $e_A\in A-B$ et $e_B\in B-A$ (car $A\not\subset B$ et $B\not\subset A$ par définition d'un stigme).

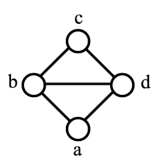
- Supposons que $F\cup\{e\}-\{e_A,e_B\}\notin\mathcal{F}$: Soit $F'=F-\{e_A\}$. On a $F'\in\mathcal{F}$ (car $F\in\mathcal{F}$) et $F'\cup\{e\}\notin\mathcal{F}$ (car $F'\cup\{e\}\supset F\cup\{e\}-\{e_A,e_B\}$). De plus, B est un stigme de $F'\cup\{e\}$ (car $B\subseteq F'\cup\{e\}=F\cup\{e\}-\{e_A\}$). Comme $F\cup\{e\}-\{e_A,e_B\}\notin\mathcal{F}$, il existe un stigme $C\subseteq F\cup\{e\}-\{e_A,e_B\}$. On a $B\neq C$ car $e_B\notin C$. Ceci contredit la minimalité de F.
- On a donc $F\cup\{e\}-\{e_A,e_B\}\in\mathcal{F}$. On déduit que $rg(F\cup\{e\})=rg(F)=|F|=|F\cup\{e\}-\{e_A,e_B\}|+1$. On conclut que $F\cup\{e\}-\{e_A\}\in\mathcal{F}$ ou $F\cup\{e\}-\{e_B\}\in\mathcal{F}$. Mais $F\cup\{e\}-\{e_A\}\supseteq B\notin\mathcal{F}$ et $F\cup\{e\}-\{e_B\}\supseteq A\notin\mathcal{F}$, contradiction.

Exemples de matroïdes

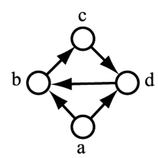
1. Soit E un ensemble fini de vecteurs soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-ensembles de vecteurs de E qui sont linéairement indépendants. Le matroïde $(E,\mathcal{F})$ est appelé **matroïde matriciel**.

2. Soit $G=(V,E)$ un graphe. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-graphes partiels sans cycle. Les propriétés (a) et (b) sont trivialement vérifiées par $(E,\mathcal{F})$. De plus, tous les indépendants maximaux au sens de l'inclusion dans un sous-graphe $G'=(V,E')$ avec $E'\subseteq E$ contiennent $|V|-p(G')$ arêtes, où $p(G')$ est le nombre de composantes connexes dans G'. On a donc la propriété 3) du théorème, ce qui prouve que $(E,\mathcal{F})$ est un matroïde, appelé **matroïde graphique**. Il s'agit en fait du matroïde matriciel correspondant à la matrice d'incidence sommets-arcs de G obtenue en orientant les arêtes de manière arbitraire. Le rang de ce matroïde est égal à $|V|-p(G)$, et les stigmes correspondent aux cycles sans cordes.

   Exemple :



Graphe original



Orientation quelconque de G

	(a,b)	(a,d)	(b,c)	(c,d)	(d,b)
a	1	1	0	0	0
b	-1	0	1	0	-1
c	0	0	-1	1	0
d	0	-1	0	-1	1

Matrice d'incidence sommets-arcs

   Remarquons que l'algorithme glouton suivant (algorithme de Kruskal) est donc optimal pour trouver un arbre de coût minimum.

   Algorithme de *Kruskal*

   Ordonner les arêtes de E de telle sorte que $c(e_1) \leq \ldots \leq c(e_n)$; Poser $F := \emptyset$;
   Pour i=1 à n **faire**
       Si $F\cup\{e_i\}$ ne contient aucun cycle **alors** poser $F := F\cup\{e_i\}$;

3. Soit E un ensemble fini et soit k un entier positif. Soit $\mathcal{F}=\{F\subseteq E$ tel que $|F|\leq k\}$. Il est facile de démontrer que $(E,\mathcal{F})$ est un matroïde appelé **matroïde de cardinalité**.

4. Soit E un ensemble fini, soit $\{E_1,E_2,\ldots,E_k\}$ une partition de E en k sous-ensembles, et soient $n_1,\ldots,n_k$ k entiers positifs. On peut définir $\mathcal{F}=\{F\subseteq E$ tel que $|F\cap E_i| \leq n_i$ $i=1,\ldots,k\}$. Il est facile de démontrer que $(E,\mathcal{F})$ est un matroïde appelé **matroïde de partition**. Si tous les n_i valent 1, on dit qu'il s'agit d'un matroïde de partition **unitaire**.

5. Soit $G=(V,E)$ un graphe. Pour un ensemble E' d'arêtes, notons $S(E')$ l'ensemble des sommets touchés par E'. Soit $\mathcal{F}=\{F\subseteq V$ tel qu'il existe un couplage C dans G avec $F\subseteq S(C)\}$. On va montrer que $(V,\mathcal{F})$ est un matroïde appelé **matroïde de couplage**. Les propriétés (a) et (b) sont évidentes. Pour démontrer (c), nous allons utiliser l'équivalence 3) du théorème. Soit $W\subseteq V$ et soient F_1 et F_2 deux ensembles indépendants maximaux au sens de l'inclusion pour W. Il existe donc des couplages C_1 et C_2 tel que $F_i=S(C_i)\cap W$ i=1,2. Supposons que $|F_1|<|F_2|$. Considérons $(C_1-C_2)\cup(C_2-C_1)$. Chaque composante connexe du sous-graphe partiel induit par ces arêtes est un cycle pair ou une chaîne. Les sommets à l'intérieur des chaînes, ainsi que ceux dans les cycles appartiennent tous à $S(C_1)\cap S(C_2)$. Comme $|F_1|<|F_2|$, il existe au moins une de ces composantes connexes qui est une chaîne P avec une extrémité $x\in F_2-F_1$, et l'autre extrémité $y\in S(C_2)-S(C_1)$ (c'est-à-dire $y\in F_2-F_1$ si $y\in W$, et $y\in V-(F_1\cup F_2)$ sinon). Considérons le couplage $C'=(C_1-P)\cup(C_2\cap P)$. On a alors $F_1\cup\{x\}\subseteq S(C')\cap W$, ce qui contredit la maximalité de F_1.

6. Soit $G=(V_1,V_2,E)$ un graphe biparti. Soit $\mathcal{F}=\{F\subseteq V_1$ tel qu'il existe un couplage C dans G avec $F\subseteq S(C)\}$. Le couple $(V_1,\mathcal{F})$ est un matroïde appelé **matroïde transversal**. C'est en fait le matroïde partiel du matroïde de couplage engendré par $V_1\subseteq V_1\cup V_2$.

7. Soit E un ensemble de tâches de durée unitaire devant être exécutées l'une après l'autre sur une machine, et soit d_i le délai de la tâche i (dernière période durant laquelle on peut exécuter la tâche i).
   Définissons $\mathcal{F} = \{F \subseteq E$ tel que toutes les tâches de F peuvent être exécutées dans les délais$\}$. En d'autres termes, F est un ensemble indépendant si on peut associer une période t_i à chaque $i \in F$ tel que $t_i \le d_i$ et $t_i \ne t_j$ si $i \ne j$. Le couple $(E, \mathcal{F})$ est un matroïde appelé **matroïde d'ordonnancement**. C'est en fait un cas particulier du matroïde transversal où $V_1=E$, V_2 est l'ensemble des périodes possibles et on met une arête entre $x \in V_1$ et $y \in V_2$ si et seulement si $y \le d_x$.

   Exemple d'application

   Supposons qu'une pénalité p_i soit associée à chaque tâche $i \in E$ qui est exécutée en retard. On désire déterminer un ordonnancement tel que la somme des pénalités à payer pour les tâches en retard soit minimale. En d'autres termes, on veut déterminer un ordonnancement tel que la somme des pénalités associées aux tâches réalisées dans les délais soit maximale (puisque c'est l'argent qu'on évite de dépenser). En définissant un ensemble de tâches comme indépendant si toutes les tâches de cet ensemble peuvent être exécutées dans les délais, on est donc amener à déterminer un ensemble indépendant de pénalité totale maximale.

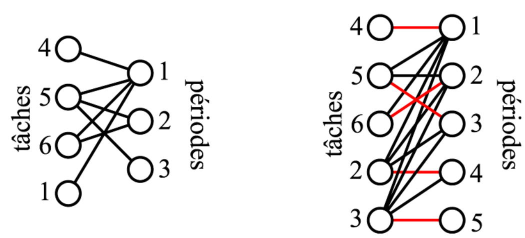
   On recherche donc un ensemble indépendant de valeur maximale dans le matroïde d'ordonnancement décrit ci-dessus. On déduit qu'il suffit d'appliquer l'algorithme GLOUTON.

   Pour les données ci-dessous,

i	1	2	3	4	5	6
d_i	1	4	5	1	3	2
p_i	6	5	4	10	9	7

   on commence par ordonner les tâches par profit non-croissant On insère donc d'abord les tâches 4, 5, et 6. Puis, en essayant de rajouter la tâche 1, on voit que {4,5,6,1} n'est pas un ensemble indépendant car il n'existe pas de couplage touchant tous les sommets de gauche dans le graphe ci-dessous à gauche.

   On rejette donc la tâche 1. On insère ensuite les tâches 2 et 3 pour finalement obtenir une solution de valeur 35 représentée ci-dessous, où $t_2=4$, $t_3=5$, $t_4=1$, $t_5=3$ et $t_6=2$ (on ne devra payer qu'une pénalité de 6).



Intersection de deux matroïdes

Problème

Soient $(E, \mathcal{F}_1)$ et $(E, \mathcal{F}_2)$ deux matroïdes définis sur E, et soit $c : E \to \mathbb{R}^+$ une fonction. On veut déterminer un ensemble indépendant $F \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ de coût c(F) maximum.

Exemples

1. <u>Détermination d'un couplage de coût maximum dans un graphe biparti.</u>
   Soit $G=(V_1,V_2,E)$ un graphe biparti, et soit $c : E \to \mathbb{R}^+$. On recherche un couplage C de coût maximum. Soit E_x l'ensemble des arêtes incidentes à x dans G. On peut définir E comme l'union des E_x avec $x \in V_1$. Soit $\mathcal{F}_1 = \{F \subseteq E$ tel que $|F \cap E_x| \le 1$ pout tout $x \in V_1\}$. On a vu que $(E, \mathcal{F}_1)$ est un matroïde de partition.
   De même, E est l'union des E_y avec $y \in V_2$. Soit $\mathcal{F}_2 = \{F \subseteq E$ tel que $|F \cap E_x| \le 1$ pout tout $y \in V_2\}$. Le couple $(E, \mathcal{F}_2)$ est un deuxième matroïde de partition.
   Un couplage dans G est un ensemble indépendant dans $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$.

Remarque : dans le matroïde transversal, un ensemble indépendant est un sous-ensemble de V_1. Si on associe des coûts aux sommets de V_1, on peut rechercher un couplage qui maximise les coûts des sommets de V_1 incidents aux arêtes du couplage. Ceci est un cas particulier du problème ci-dessus dans lequel toutes les arêtes de E_x ont le coût du sommet $x\in V_1$. Alors que le couplage optimal dans le matroïde de couplage peut être déterminé à l'aide de l'algorithme glouton, un algorithme plus complexe est nécessaire pour la détermination d'un couplage optimal dans le cas où les arêtes incidentes à un même sommet de V_1 peuvent avoir des coût différents.

2. <u>Arborescence de poids maximum dans un graphe.</u>
   Soit $G=(V,A)$ un graphe orienté, soit r une racine dans G et soit $c : A \rightarrow \mathbb{R}^+$. On recherche une arborescence de racine r et de coût total maximum.
   Une arborescence est un arbre orienté. On recherche donc un ensemble indépendant dans le matroïde graphique associé à G.
   De plus, pour que cet arbre soit une arborescence dans G, il faut que chaque sommet ait exactement un prédécesseur dans l'arborescence. Notons A_x l'ensemble des prédécesseurs de x dans G. L'ensemble A est l'union des ensembles A_x avec $x\in V$. Pour qu'un sous-ensemble F d'arcs dans G soit une arborescence, il faut que $|A_x\cap F|\leq 1$ pout tout $x\in V-\{r\}$ et $|A_r \cap F|\leq 0$. Une arborescence est donc un ensemble indépendant dans le matroïde de partition décrit ci-dessus (avec $n_x=1$ pour $x\neq r$ et $n_r=0$).

Soient $(E,\mathcal{F}_1)$ et $(E,\mathcal{F}_2)$ 2 matroïdes définis sur E, et soit $c : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. Soit R la taille maximale d'un ensemble indépendant dans $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$. L'algorithme ci-dessous détermine des ensembles indépendants $F^k\in \mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ pour k=0,1,...,R tels que F^k est de coût $c(F^k)$ maximum parmi les ensembles indépendants de $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ de taille k.

Notation

Pour un ensemble $F\subseteq E$, nous noterons $cl_i(F)$ sa clôture dans le $i^{ème}$ matroïde.
Pour un ensemble $F\in \mathcal{F}_i$, et pour un élément $e\in E-F$ tel que $F\cup\{e\}\notin \mathcal{F}_i$, nous noterons $S_i(F,e)$ le stigme contenu dans $F\cup\{e\}$ par rapport au $i^{ème}$ matroïde.

Algorithme

0. $k :=0; F^k :=\emptyset; c_1 :=0; c_2 :=c;$

1. Calculer $m_i=\max\{c_i(e)$ tel que $e\in E-cl_i(F^k)\}$ pour i=1,2
   Déterminer $E_i=\{e\in E-cl_i(F^k)$ tel que $c_i(e)=m_i\}$ pour i=1,2
   Si $E_1=\emptyset$ ou $E_2=\emptyset$ alors STOP (F^k est un ensemble indépendant maximal dans l'un des matroïdes, et il n'existe donc pas d'ensemble indépendant de $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ de cardinalité supérieure à F^k)

2. Construire le graphe orienté G=(E,A) où A est l'ensemble des arcs (x,y) tel que
   - $x\notin F^k$, $y\in F^k$, $x\in cl_1(F^k)$, $y\in S_1(F^k,x)$ et $c_1(x)=c_1(y)$, ou
   - $y\notin F^k$, $x\in F^k$, $y\in cl_2(F^k)$, $x\in S_2(F^k,y)$ et $c_2(x)=c_2(y)$

   S'il existe un chemin dans G reliant E_2 à E_1, alors aller à 3. Sinon aller à 4.

3. Choisir un chemin reliant E_2 à E_1 et ayant aussi peu de sommets que possible. Soit W l'ensemble des sommets sur ce chemin : poser $F^{k+1} :=(F^k-W)\cup(W-F^k)$ (différence symétrique), k:=k+1 et aller à 1.

4. Soit W l'ensemble des sommets atteignables depuis E_2.
   Calculer $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4\}$ avec
   - $\delta_1=\min \{c_1(y)-c_1(x)$ tel que $x\notin F^k$, $y\in F^k$, $x\in cl_1(F^k)\cap W$, $y\in S_1(F^k,x)-W\}$
   - $\delta_2=\min \{m_1 - c_1(x)$ tel que $x \in (E - cl_1(F^k)) \cap W\}$
   - $\delta_3=\min \{c_2(y)-c_2(x)$ tel que $x\notin F^k$, $y\in F^k$, $x\in cl_2(F^k)-W$, $y\in S_2(F^k,x)\cap W\}$
   - $\delta_4=\min \{m_2 - c_2(x)$ tel que $x \in (E - cl_2(F^k)) -W\}$

   Si $\delta=\infty$: STOP (Il n'existe pas d'ensemble indépendant de $\mathcal{F}_1\cap\mathcal{F}_2$ de cardinalité supérieure à F^k).
   Sinon, poser $c_1(x) :=c_1(x)+ \delta$ et $c_2(x)=c_2(x)-\delta$ pour tout $x\in W$ et aller à 1.

Propriété	$c(F^{k+1})-c(F^k) \leq c(F^k)-c(F^{k-1})$

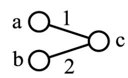
En d'autres termes, la fonction $f(i)=c(F^i)$ est concave. Si on recherche un ensemble indépendant (pas nécessairement maximal) de coût total maximum, on peut s'arrêter dès que $c(F^{k+1}) \leq c(F^k)$: l'ensemble F^k est alors un ensemble indépendant de coût total maximum.

On peut également démontrer que
- lorsqu'on détermine $F^{k+1} :=(F^k-W)\cup(W-F^k)$ à l'étape 3, on a $c(F^{k+1})-c(F^k)=m_1+m_2$.
- m_1 et m_2 sont non croissants

On déduit donc qu'on peut stopper l'algorithme dès que $m_1+m_2 \leq 0$.

1^er exemple

Recherche d'un couplage de coût maximum dans le graphe ci-dessous.

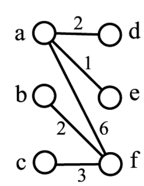


0. k :=0; $F^0 :=\emptyset$; $c_1(a,c)=c_1(b,c)=0$, $c_2(a,c)=1$, $c_2(b,c)=2$.
1. $m_1=0$, $E_1=E$, $m_2=2$ et $E_2=\{(b,c)\}$
2. G est formé de deux sommets isolés (a,c) et (b,c). Comme $(b,c)\in E_1\cap E_2$, il existe un chemin de E_2 à E_1
3. $W=\{(b,c)\}$, $F^1=\{(b,c)\}$, k=1
1. $m_1=0$, $E_1=\{(a,c)\}$, $m_2= -\infty$, $E_2=\emptyset$. STOP (F^1 est maximal pour le 2^ème matroïde).

On déduit donc que {(b,c)} est un couplage de coût maximum dans le graphe. (Il n'existe pas de couplage de cardinalité plus grande car il n'existe pas d'ensemble indépendant de taille 2 dans le 2^ème matroïde).

2^ème exemple

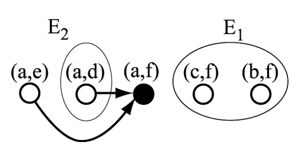
Recherche d'un couplage de coût maximum dans le graphe ci-dessous.



0. k :=0; $F^0 :=\emptyset$;

e	(a,d)	(a,e)	(a,f)	(b,f)	(c,f)
$c_1(e)$	0	0	0	0	0
$c_2(e)$	2	1	6	2	3

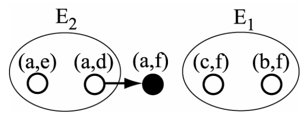
1. $m_1=0$, $E_1=E$, $m_2=6$ et $E_2=\{(a,f)\}$
2. G est formé de cinq sommets isolés. Comme $(a,f)\in E_1\cap E_2$, il existe un chemin de E_2 à E_1
3. $W=\{(a,f)\}$, $F^1=\{(a,f)\}$, k=1
1. $m_1=0$, $E_1=\{(b,f),(c,f)\}$, $m_2= 2$, $E_2=\{(a,d)\}$.
2. G est le graphe suivant



4. $W=\{(a,d),(a,f)\}$, $\delta_1=\infty$, $\delta_2=\infty$, $\delta_3=\min\{6-2,6-3\}=3$, $\delta_4=\min\{2-1\}=1$, $\delta=\min\{3,1\}=1$

e	(a,d)	(a,e)	(a,f)	(b,f)	(c,f)
$c_1(e)$	1	0	1	0	0
$c_2(e)$	1	1	5	2	3

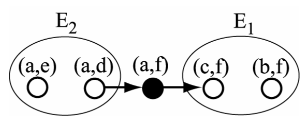
1. m_1=0, E_1={(b,f),(c,f)}, m_2= 1, E_2={(a,d),(a,e)}.
2. G est le graphe suivant



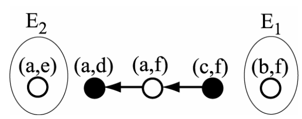
4. W={(a,d),(a,e),(a,f)}, $\delta_1=\infty$, $\delta_2=\infty$, δ_3=min {5-2,5-3}=2, $\delta_4=\infty$, δ=2

e	(a,d)	(a,e)	(a,f)	(b,f)	(c,f)
$c_1(e)$	3	2	3	0	0
$c_2(e)$	-1	-1	3	2	3

1. m_1=0, E_1={(b,f),(c,f)}, m_2= -1, E_2={(a,d),(a,e)}. (On peut stopper l'algorithme ici si on recherche un couplage de coût maximum car $m_1+m_2<0$)
2. G est le graphe suivant qui contient un chemin de E_2 vers E_1.



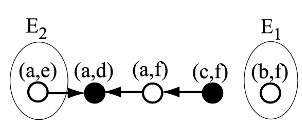
3. W={(a,d),(a,f),(c,f)}, F^2={(a,d),(c,f)}, k=2.
1. m_1=0, E_1={(b,f)}, m_2= -1, E_2={(a,e)}.
2. G est le graphe suivant



4. W={(a,e) }, δ_1=3-2 $\delta_2=\delta_3=\delta_4=\infty$, δ=1

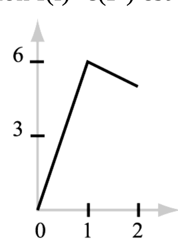
e	(a,d)	(a,e)	(a,f)	(b,f)	(c,f)
$c_1(e)$	3	3	3	0	0
$c_2(e)$	-1	-2	3	2	3

1. m_1=0, E_1={(b,f)}, m_2= -2, E_2={(a,e)}.
2. G est le graphe suivant



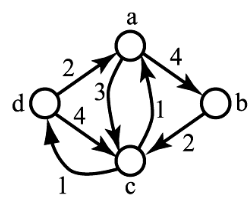
4. W={(a,d),(a,e) }, $\delta_1=\delta_2=\delta_3=\delta_4=\delta=\infty$: STOP

Le couplage {(a,d),(c,f)} est donc de coût maximum parmi les couplages de cardinalité maximale. Si on recherche un couplage (non nécessairement de cardinalité maximale) de coût maximum, alors la solution optimale est F^1, c'est-à-dire {(a,f)}. La fonction $f(i)=c(F^i)$ est représentée ci-dessous.

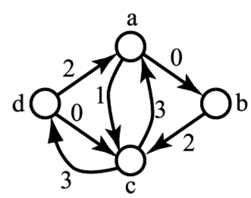


3ème exemple

Recherche d'une arborescence de racine d et de coût minimum dans le graphe ci-dessous.



Comme l'algorithme que nous avons décrit détermine des ensembles indépendants de coût maximum, on transforme chaque coût c(e) par c'(e)=C-c(e) où C est le maximum des coûts sur le graphe. On doit donc déterminer une arborescence de racine d et de coût maximum dans le graphe ci-dessous.



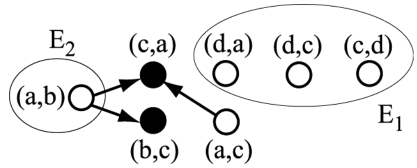
0. k :=0; $F^0 := \emptyset$;

e	(a,b)	(a,c)	(b,c)	(c,a)	(c,d)	(d,a)	(d,c)
$c_1(e)$	0	0	0	0	0	0	0
$c_2(e)$	0	1	2	3	3	2	0

1. m_1=0, E_1=E, m_2=3 et E_2={(c,a)} (L'arc (c,d) ne fait pas partie de E_2 car d ne doit pas avoir d'arc entrant dans le 2ème matroïde)
2. Comme $(c,a) \in E_1 \cap E_2$, il existe un chemin de E_2 à E_1
3. W={(c,a)}, F^1={(c,a)}, k=1

1. m_1=0, E_1={(a,b),(b,c),(c,d),(d,a),(d,c)}, m_2=2, E_2={(b,c)}. (L'arc (d,a) ne fait pas partie de E_2 car le sommet a ne doit pas avoir plus d'un arc entrant dans le 2ème matroïde)
2. Comme $(b,c) \in E_1 \cap E_2$, il existe un chemin de E_2 à E_1
3. W={(b,c)}, F^2={(c,a),(b,c)}, k=2

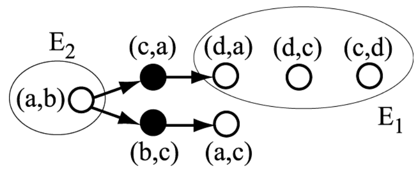
1. m_1=0, E_1={(c,d),(d,a),(d,c)}, m_2= 0, E_2={(a,b)}.
2. G est le graphe suivant



4. W={(a,b),(c,a),(b,c))}, $\delta_1=\infty$, $\delta_2=\infty$, δ_3=min {3-2, 2-1, 2-0}=1, $\delta_4=\infty$, δ=1

e	(a,b)	(a,c)	(b,c)	(c,a)	(c,d)	(d,a)	(d,c)
$c_1(e)$	1	0	1	1	0	0	0
$c_2(e)$	-1	1	1	2	3	2	0

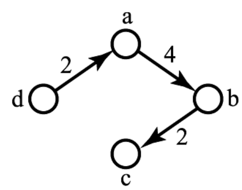
1. m_1=0, E_1={(c,d),(d,a),(d,c)}, m_2= -1, E_2={(a,b)}.
2. G est le graphe suivant



3. W={(a,b),(c,a),(d,a)}, F^3={(a,b),(b,c),(d,a)}, k=3.

1. m_1=-∞, E_1=∅, m_2= -∞, E_2=∅. STOP.

L'arborescence de coût maximum est donc de coût c'(F^3)=4. Dans le graphe original, cette arborescence est de coût minimum c(F^3)=3C-c'(F^3)=8 et est représentée ci-dessous.



Intersection de k>2 matroïdes

Problème

Soient $(E,\mathcal{F}_i)$ i=1,…,k des matroïdes définis sur E, avec k>2, et soit c : E $\rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction.

On veut déterminer un ensemble indépendant $F \in \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_i$ de coût c(F) maximum

Il n'existe à ce jour aucun algorithme efficace pour résoudre ce problème.

Exemple

<u>Problème du chemin hamiltonien de coût minimum dans un graphe G=(V,E)</u>
Remarquons tout d'abord qu'on peut transformer ce problème en la recherche d'un chemin hamiltonien de coût maximum avec tous les coûts dans $\mathbb{R}_+$. Pour cela il suffit de remplacer chaque coût c'_{ij}= C-c_{ij} où C est une constante au moins égale au maximum des coûts sur G. En effet, chaque chemin hamiltonien dans G utilise |V|-1 arcs et pour tout chemin hamiltonien P on a donc $\sum_{(i,j)\in P} c'_{ij} = C(|V|-1) - \sum_{(i,j)\in P} c_{ij}$.

Le problème du chemin hamiltonien est un problème d'intersection de k=3 matroïdes puisqu'un chemin hamiltonien est une arborescence dans laquelle chaque sommet a au plus un successeur. On a donc une intersection entre

- le matroïde graphique (le chemin est un arbre),
- un premier matroïde de partition (chaque sommet a au plus un prédécesseur)
- un deuxième matroïde de partition (chaque sommet a au plus un successeur).