

FLOTS - Applications

Un graphe $G=(V,E)$ est **biparti** si et seulement si son nombre chromatique $\chi(G)$ est inférieur ou égal à 2. En d'autres termes, $G=(V,E)$ est biparti si et seulement si il existe une partition (V_1, V_2) de V tel que chaque arête de E a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 . On notera $G=(V_1, V_2, E)$

Un **couplage** dans $G=(V,E)$ est un sous-ensemble d'arêtes n'ayant aucune extrémité en commun.

Problème 1 : déterminer un couplage de cardinalité maximale dans un graphe biparti $G=(V_1, V_2, E)$

Algorithme

- (1) Construire un réseau R comme suit.
 - o Orienter chaque arête de G de V_1 vers V_2 et donner une capacité infinie à chacun de ces arcs.
 - o Ajouter un sommet s et un arc de s vers chaque sommet de V_1 , ces arcs étant de capacité 1.
 - o Ajouter un sommet t et un arc de chaque sommet de V_2 vers t , ces arcs étant de capacité 1.
- (2) Déterminer un flot maximum de s vers t dans R . Le couplage est constitué de chaque arc entre V_1 et V_2 dans lequel une unité de flot circule.

Rappel : un ensemble transversal est un ensemble de sommets touchant toutes les arêtes de G . La cardinalité minimale d'un ensemble transversal dans G est dénotée $\tau(G)$.

Propriété $|C| \leq \tau(G)$ pour tout couplage C dans G , et pour tout graphe G (non nécessairement biparti)

Preuve Un ensemble transversal doit contenir au moins une extrémité de chaque arête du couplage C .

Théorème de König I Si $G=(V_1, V_2, E)$ est biparti alors $\kappa(G) = \tau(G)$

Preuve

Soit f un flot maximum déterminé par l'algorithme ci-dessus. On a donc $f_{s \rightarrow t} = \kappa(G)$

Soit A l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre depuis s dans $R^*(f)$, et soit $T = (V_1 - A) \cup (V_2 \cap A)$.

Chaque arc (x,y) de V_1 vers V_2 étant de capacité infinie, on ne peut pas avoir x dans A et y hors de A . L'ensemble T est donc un ensemble transversal car si une arête n'a aucune extrémité dans T , cela signifie que l'extrémité dans V_1 est dans A , et celle dans V_2 est hors de A , contradiction.

On a vu que $f_{s \rightarrow t} = C(A, V \cup \{s,t\} - A)$. Les arcs de la coupe $(A, V \cup \{s,t\} - A)$ sont ceux qui vont de s vers $V_1 - A$, et ceux allant de $V_2 \cap A$ vers t . On a donc $f_{s \rightarrow t} = |V_1 - A| + |V_2 \cap A| = |T| \geq \tau(G)$ d'où on déduit $\kappa(G) \geq \tau(G)$.

La propriété ci-dessus nous montre que $\kappa(G) \leq \tau(G)$ et on peut donc conclure à l'égalité.

Théorème Dans un graphe biparti $G=(V_1, V_2, E)$ on a $\kappa(G) = |V_1|$ si et seulement si $|N(W)| \geq |W| \forall W \subseteq V_1$.

Problème 2 : déterminer l'indice chromatique d'un graphe biparti $G=(V_1, V_2, E)$

Rappel : si on note $\Delta(G)$ le plus grand degré d'un sommet dans G , alors on a $q(G) \geq \Delta(G)$ pour tout graphe G .

Théorème de König II Si $G=(V_1, V_2, E)$ est biparti alors $q(G) = \Delta(G)$

Preuve algorithmique

Soit G' le multi-graphe obtenu en faisant deux copies $G^1=(V_1^1, V_2^1, E^1)$ et $G^2=(V_1^2, V_2^2, E^2)$ de G et en reliant chaque sommet x de G_1 à sa copie dans G_2 à l'aide de $\Delta(G)$ -degré $_G(x)$ arête parallèles. Le multi-graphe G' est donc biparti avec comme partition des sommets $V_1' = V_1^1 \cup V_2^2$ et $V_2' = V_2^1 \cup V_1^2$. De plus, chaque sommet dans G' est de degré $\Delta(G)$.

Soit W un sous ensemble de V_1' . On a $|N(W)| \geq |W|$ par construction, et le théorème ci-dessus nous assure qu'il existe un couplage touchant tous les sommets de V_1' . Donnons la couleur 1 aux arêtes de ce couplage et retirons les de G' . Chaque sommet dans G' a maintenant un degré $\Delta(G)-1$ et on recherche à nouveau un couplage, etc.

À la fin de ce processus on aura coloré les arêtes de G' en $\Delta(G)$ couleurs, et donc aussi celles de G en $\Delta(G)$ couleurs.

Problème 3 : Ensembles comparables ou incomparables étant donnée une relation d'ordre partiel.

Soit \mathfrak{R} une relation d'ordre partiel définie sur un ensemble V , et soit W un sous-ensemble de V .

- W est un **ensemble comparable** si $x\mathfrak{R}y$ ou $y\mathfrak{R}x$ pour tout x,y dans W .
- W est un **ensemble incomparable** si on a ni $x\mathfrak{R}y$ ni $y\mathfrak{R}x$ pour tout x,y dans W .

On peut associer à \mathfrak{R} un graphe $G_{\mathfrak{R}}$ avec V comme ensemble de sommets et tel qu'il existe un arc de x vers y si et seulement si $x\mathfrak{R}y$.

Théorème de Dilworth

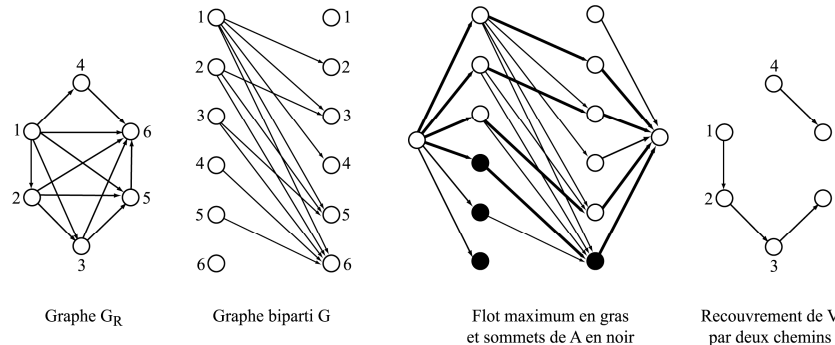
Le nombre minimum d'ensembles comparables nécessaires pour recouvrir V est égal à la taille maximale d'un ensemble incomparable.

Algorithme

- (1) Construire un graphe biparti $G=(V_1,V_2,A)$ avec $V_1=V_2=V$ et mettre un arc de $x\in V_1$ vers $y\in V_2$ si et seulement si $x\mathfrak{R}y$.
- (2) Déterminer un couplage maximum dans G à l'aide de l'algorithme de flot tel que décrit dans la page précédente.
- (3) Soit A l'ensemble des sommets que l'on peut atteindre depuis s dans $R^*(f)$, et soit $T=(V_1 - A) \cup (V_2 \cap A)$.

L'ensemble $V-T$ est un ensemble incomparable maximum et le couplage induit un recouvrement de V par un ensemble minimum de chemins dans $G_{\mathfrak{R}}$: si H est le sous-graphe partiel de $G_{\mathfrak{R}}$ ne contenant que les arcs du couplage, alors chaque composante connexe de H correspond à un chemin (ensemble comparable).

Illustration : $V=\{1,2,3,4,5,6\}$, $1\mathfrak{R}2, 1\mathfrak{R}3, 1\mathfrak{R}4, 1\mathfrak{R}5, 1\mathfrak{R}6, 2\mathfrak{R}3, 2\mathfrak{R}5, 2\mathfrak{R}6, 3\mathfrak{R}5, 3\mathfrak{R}6, 4\mathfrak{R}6, 5\mathfrak{R}6$.



On a ici $T=\{1,2,3,6\}$ et l'ensemble complémentaire $\{4,5\}$ est donc un ensemble incomparable maximum alors que le couplage induit un recouvrement de V en 2 ensembles comparables $\{1,2,3,5\}$, et $\{4,6\}$.

Problème 4 : Complétion de carrés latins

Un **carré latin** est une matrice $n \times n$ telle que chaque ligne et chaque colonne contient tous les entiers $1,2,\dots,n$.

Exemple d'application

chaque ligne correspond à un professeur, chaque colonne à une classe, et chaque entier à une période. Chaque professeur doit donner exactement un cours par période et chaque classe doit suivre exactement un cours par période.

Supposons que les q premières colonnes des p premières lignes sont déjà remplies. Notons $A(x)$ le nombre d'apparitions de x dans ce pré-remplissage.

Théorème Le carré peut-être complété en carré latin si et seulement si chaque entier apparaît au moins $p+q-n$ fois

Preuve

(condition nécessaire) Chaque entier ne peut être rajouté qu'au plus $n-p$ fois dans les $n-p$ dernières lignes et $n-q$ fois dans les $n-q$ dernières colonnes, donc un total de $2n-p-q$ fois au maximum. Si un entier x apparaît $A(x)$ fois avec $A(x) < p+q-n$, alors il faut encore le rajouter $n-A(x)$ fois, et on a $n-A(x) > 2n-p-q$, contradiction.

(condition suffisante) Construisons un graphe biparti $G=(V_1,V_2,E)$ avec $V_1=\{1,2,\dots,n\}$, $V_2=\{1,2,\dots,p\}$ et dans lequel un sommet x de V_1 est relié à un sommet y de V_2 si et seulement si x n'apparaît pas dans la ligne y . Chaque sommet de V_2 a donc un degré égal à $n-q$. Par hypothèse, chaque sommet x de V_1 a un degré $p-A(x) \leq n-q$. On a donc $q(G)=\Delta(G)=n-q$. Colorons donc les arêtes de G en $q(G)$ couleurs et mettons x dans la y^e ligne de la $(q+i)^e$ colonne si l'arête reliant x et y a la couleur i . On obtient donc une complétion des p premières lignes de la matrice.

Construisons maintenant un graphe biparti $G'=(V_1',V_2',E')$ avec $V_1'=V_2'=\{1,2,\dots,n\}$ et dans lequel un sommet x de V_1' est relié à un sommet y de V_2' si et seulement si x n'apparaît pas dans la colonne y . Chaque sommet de V_1' et de V_2' est de degré $n-p$. On a donc $q(G')=\Delta(G')=n-p$. Colorons donc les arêtes de G' en $q(G')$ couleurs et mettons x dans la y^e colonne de la $(p+i)^e$ ligne si l'arête reliant x et y a la couleur i . On obtient donc un carré latin complet.

Problème 5 : Décomposition de matrices carrées uniformes en combinaisons convexes de matrices de permutation

Une matrice $M=(m_{ij})$ de taille $n \times n$ est dite **T-uniforme** si chaque élément est positif et si la somme des éléments sur chaque ligne et sur chaque colonne est égale à T.

On peut associer à M un graphe biparti $G_M=(V_1, V_2, E)$ avec $V_1=V_2=\{1, 2, \dots, n\}$ et dans lequel un sommet x de V_1 est relié à un sommet y de V_2 si et seulement si $m_{xy} > 0$.

Une **matrice de permutation** est une matrice 1-uniforme dont tous les éléments sont égaux à 0 ou 1.

Propriété Si M est une matrice $n \times n$ T-uniforme, alors G_M contient un couplage de cardinalité n

Preuve Soit $W \subseteq V_1$. On a $\sum_{i \in W} \sum_{j \in N(W)} m_{ij} = T|W|$ et $\sum_{i=1}^n \sum_{j \in N(W)} m_{ij} = T|N(W)|$. Comme cette deuxième somme est nécessairement supérieure ou égale à la première, on en déduit que $|N(W)| \geq |W|$ pour tout $W \subseteq V_1$

Théorème Toute matrice 1-uniforme est une combinaison convexe de matrices de permutation

Algorithme de décomposition de M T-uniforme en $\sum_{i=1}^k \lambda_i P_i$ avec $\sum_{i=1}^k \lambda_i = T$ et $P_i =$ matrice de permutation ($i=1, \dots, k$)

- (1) Poser $k := 1$;
- (2) Si M ne contient que des zéros, STOP.
Sinon déterminer un couplage maximum C dans G_M .
- (3) Soit $\lambda_k = \min_{(i,j) \in C} m_{ij}$ et soit $P_k = (p_{ij})$ la matrice de permutation telle que $p_{ij} = 1$ si et seulement si $(i,j) \in C$.

Poser $M = M - \lambda_k P_k$ (cette matrice est $T - \sum_{i=1}^k \lambda_i$ -uniforme) et retourner à (2)

Application

Soient n pièces P_1, P_2, \dots, P_n et m machines M_1, M_2, \dots, M_m . La fabrication de P_i sur M_j prend un temps t_{ij} .

On peut répartir la production d'une pièce sur plusieurs machines, mais chaque pièce ne peut se trouver en chaque instant que sur une seule machine, et chaque machine ne peut traiter qu'une pièce à la fois

Problème : comment minimiser le temps total de fabrication?

1^{ère} étape : Résoudre le problème de programmation linéaire suivant dont la valeur optimale sera notée T^* .

$$\begin{aligned} & \min T \\ \text{sous-contraintes} & \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} = 1 \quad \forall i=1, \dots, n \\ & \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} t_{ij} \leq T \quad \forall j=1, \dots, m \\ & \quad \sum_{j=1}^m x_{ij} t_{ij} \leq T \quad \forall i=1, \dots, n \\ & \quad x_{ij} \geq 0 \quad \forall i=1, \dots, n, \forall j=1, \dots, m \end{aligned}$$

2^e étape : Soit T^* la valeur optimale du problème ci-dessus et soient x_{ij}^* les valeurs optimales des variables. T^* est une borne inférieure sur le temps nécessaire pour la fabrication. On va montrer que cette borne peut être atteinte. Pour ce faire, construire la matrice M $(n+m) \times (n+m)$ T^* -uniforme suivante

- o $m_{ij} = x_{ij}^* t_{ij}$ pour tout couple (i,j) tel que $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j \in \{1, 2, \dots, m\}$
- o $m_{ij} = m_{(n+m+1-j)(n+m+1-i)}$ pour tout couple (i,j) tel que $i \in \{n+1, 2, \dots, n+m\}$ et $j \in \{m+1, 2, \dots, n+m\}$
- o $m_{ij} = T^* - \sum_{j=1}^m x_{ij}^* t_{ij}$ pour tout couple (i,j) tel que $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et $j = m+n+1-i$
- o $m_{ij} = T^* - \sum_{i=1}^n x_{ij}^* t_{ij}$ pour tout couple (i,j) tel que $i = n+m+1-j$ et $j \in \{1, 2, \dots, m\}$
- o $m_{ij} = 0$ sinon

3^e étape : Décomposer M en $\sum_k \lambda_k P_k$ et faire pendant λ_k unités de temps ce qui est indiqué dans les n premières lignes et les m premières colonnes de P_k (c'est-à-dire qu'un 1 en i^e ligne et j^e colonne signifie qu'on produit P_i sur M_j).

Problème 6 : Problème de transbordement

Soit $R=(V,A)$ un réseau orienté avec un ensemble S de sources (sommets sans prédécesseurs) et un ensemble T de puits (sommets sans successeur). On désire transporter un produit des sources aux puits. Soit O_i l'offre au sommet s_i de S et D_j la demande du sommet j de T . On suppose que l'offre est égale à la demande, c'est-à-dire que $\sum_{i \in S} O_i = \sum_{j \in T} D_j$.

À chaque arc a de R on associe un coût d_a par unité de produit circulant sur a .

Le **problème de transbordement** consiste à réaliser ce transport en un coût minimum.

Pour ce faire, il suffit de rajouter

- un sommet s ainsi qu'un arc de s vers chaque sommet s_i de S de capacité O_i et de coût nul,
- un sommet t ainsi qu'un arc de chaque sommet t_j de T vers t de capacité D_j et de coût nul.

Puis on détermine un flot compatible maximum de coût minimum sur ce réseau.

Si $\sum_{i \in S} O_i > \sum_{j \in T} D_j$ alors on peut rajouter un sommet dans T de demande $\sum_{i \in S} O_i - \sum_{j \in T} D_j$

Cas particuliers

- Le problème de transport : il s'agit d'un problème de transbordement sans sommet intermédiaire, c'est-à-dire tel que $V=S \cup T$. Le réseau est donc un graphe biparti.
- Le problème d'affectation : il s'agit d'un problème de transport dans lequel toutes les demandes O_i et les offres D_j sont unitaires. On cherche donc un couplage maximum de coût minimum