Définitions

Nous noterons G=(V,E) le graphe non orienté ayant V comme ensemble de **sommets** et E comme ensemble d'**arêtes**. Nous noterons G=(V,A) le graphe orienté ayant A comme ensemble d'**arcs**.
Une arête reliant x et y sera notée [x,y] alors qu'un arc reliant x à y sera noté (x,y).

Le **degré** d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. On note $\Delta(G)$ le degré maximum des sommets de G.

Une **chaîne** est une suite $e_1,\ldots,e_n$ d'arêtes telle que chaque e_i $(1\leq i\leq n)$ a une extrémité en commun avec e_{i-1} $(i>1)$ et l'autre avec e_{i+1} $(i<n)$. Si les deux extrémités de la chaîne coïncident, on parle de **cycle**.
Un **chemin** est une suite $a_1,a_2,\ldots,a_n$ d'arcs telle que chaque a_i $(1\leq i<n)$ a sont extrémité terminale égale à l'extrémité initiale de a_{i+1}. Si les deux extrémités du chemin coïncident, on parle de **circuit**.

Une chaîne est
- **élémentaire** si elle passe au plus une fois par chaque sommet.
- **simple** si elle passe au plus une fois par chaque arête.
- **hamiltonienne** si elle passe exactement une fois par chaque sommet
- **eulérienne** si elle passe exactement une fois par chaque arête

Les quatre concepts sont définis de manière similaire pour les cycles, les chemins et les circuits.

Deux sommets font partie d'une même **composante connexe** d'un graphe G si et seulement si il existe une chaîne dans G qui les relie.
Un graphe est **connexe** s'il n'a qu'une composante connexe.
Un graphe orienté est **fortement connexe** si pour toute paire de sommets x et y il existe dans G un chemin de x vers y et un chemin de y vers x.
Un **arbre** est un graphe connexe sans cycle simple.
Une arbre orienté est une **arborescence** s'il existe un sommet r n'ayant aucun arc entrant et si tous les autres sommets ont un unique arc entrant. Le sommet r est appelé la **racine** de l'arborescence.

Un graphe G=(V,E) est **biparti** si et seulement si il existe une partition (V_1,V_2) de V tel que chaque arête de E a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. On notera $G=(V_1,V_2,E)$

Le **graphe de ligne** associé à un graphe G est le graphe qu'on notera L(G) dont les sommets représentent les arêtes de G, et tel que deux sommets de L(G) sont reliés par une arête si et seulement si les deux arêtes qu'ils représentent dans G ont une extrémité commune.

Soit G=(V,E) un graphe et W un sous ensemble de sommets de G.
- On note [W,V-W] l'ensemble des arêtes ayant une extrémité dans W et l'autre hors de W.
- On note E(W) l'ensemble des arêtes de G ayant leur deux extrémités dans W.
- L'ensemble des arêtes de [W,V-W] est appelé un **co-cycle**.
- Dans le cas d'un graphe orienté, si tous les arcs traversant la frontière entre W et V-W sont dirigés dans le même sens, ces arcs forment un **co-circuit**.
- Le graphe G'=(W,E(W)), aussi noté G[W], est appelé **sous-graphe induit** de G.
- Soit F un sous-ensemble de E(W). Le graphe G''=(W,F) est appelé **sous-graphe partiel** de G

Soit *v* un sommet et *e* une arête dans un graphe G=(V,E). Nous noterons
- G-*v* le sous-graphe induit obtenu en supprimant *v* de G (c'est-à-dire que G-*v*=G[V-{*v*}])
- G-*e* le sous-graphe partiel obtenu en supprimant *e* de G (c'est-à-dire que G-*e*=(V,E-{*e*})

Remarque

Tout sous-graphe induit de G est un sous-graphe partiel de G alors qu'un sous-graphe partiel de G n'est pas nécessairement un sous-graphe induit de G.

Soit G=(V,E) un graphe. Nous noterons $\overline{G}$ le graphe $(V,\{[x,y] \mid x,y\in V,\ x\neq y, \text{ et } [x,y]\notin E\})$. On dit que $\overline{G}$ est le graphe **complémentaire** de G.

Soit G=(V,E) un graphe. Soit W un sous-ensemble de sommets de G.

- W est **stable** si chaque arête de G a au plus une extrémité dans W
- W est **transversal** si chaque arête de G a au moins une extrémité dans W
- W est une **clique** si toute paire de sommets de W est reliée par une arête de G

Soit G=(V,E) un graphe. Soit F un sous-ensemble d'arêtes de G.

- F est un **couplage** si chaque sommet de G est l'extrémité d'au plus une arête de F.

Une **coloration des sommets** de G est une affectation de couleurs aux sommets telle que chaque arête de G a ses deux extrémités de couleur différente

Une **coloration des arêtes** de G est une affectation de couleurs aux arêtes telle que les arêtes ayant une extrémité en commun sont de couleur différente

Quelques paramètres

- $\alpha G)$ = taille du plus grand ensemble stable dans G
  = le **nombre de stabilité** de G
- $\tau(G)$ = taille du plus petit transversal dans G
- $\omega(G)$ = taille de la plus grande clique dans G
- $\theta(G)$ = plus petit nombre de cliques nécessaires pour recouvrir tous les sommets de G
- $\kappa(G)$ = la taille maximale d'un couplage dans un graphe G
- $\chi(G)$ = le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les sommets de G
  = le **nombre chromatique** de G
- $q(G)$ = le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorer les arêtes de G
  = l'**indice chromatique** de G

Quelques propriétés qui découlent des définitions

- $\alpha(G) + \tau(G) = |V|$
- $\alpha(G)=\omega(\overline{G})$
- $\theta(G) = \chi(\overline{G})$
- $\chi(G)\geq\omega(G)$
- $\theta(G) \geq \alpha(G)$
- $q(G) \geq \Delta(G)$
- $\alpha(L(G)) = \kappa(G)$
- $\kappa(G) \leq \tau(G)$
- $\chi(G) \leq 2$ si G est biparti
- tout arbre est biparti