

Soit $G=(V,E)$ un graphe. Rappelons quelques définitions

- Un couplage C est un ensemble d'arêtes 2 à 2 non adjacentes.
- Un ensemble stable S est un ensemble de sommets 2 à 2 non adjacents.
- Un ensemble transversal T est un ensemble de sommets tel que chaque arête de G a au moins une extrémité dans T .

On note

- $\alpha(G)$ la cardinalité maximale d'un ensemble stable dans G
- $\tau(G)$ la cardinalité minimale d'un ensemble transversal dans G .
- $\kappa(G)$ la cardinalité maximale d'un couplage dans un graphe G .
- $\theta(G)$ le plus petit nombre de cliques nécessaires pour recouvrir les sommets de G .

Définition

Soit $G=(V,E)$ un graphe. Le **graphe de ligne** associé à G est le graphe qu'on notera $L(G)$ dont les sommets représentent les arêtes de G , deux de ses sommets étant reliés par une arête si et seulement si les deux arêtes qu'ils représentent ont une extrémité commune dans G .

Rappel de propriétés

- $\alpha(L(G))= \kappa(G)$ pour tout graphe G
- $\alpha(G)+ \tau(G)=|V|$ pour tout graphe G
- $\tau(G)= \kappa(G) = |V|-\alpha(G)$ pour tout graphe biparti G .
- $\omega(G)=\alpha(G)\leq\theta(G)=\chi(G)$ pour tout graphe G .

Il est facile de déterminer un couplage maximum dans un graphe biparti puisque ce problème se ramène à la recherche d'un flot maximum. On va maintenant montrer comment trouver en temps polynomial un couplage maximum dans un graphe quelconque.

Définitions

- Un sommet x est saturé par un couplage C si x est l'extrémité d'une arête de C . Dans le cas contraire, x est insaturé.
- Si C est un couplage de $G=(V,E)$, on appelle chaîne alternée relativement à C une chaîne élémentaire de G dont les arêtes sont alternativement dans C et hors de C
- Une chaîne alternée est dite augmentante si elle relie deux sommets insaturés.
- Soit C un couplage et L une chaîne alternée relativement à C dont chaque extrémité est soit un sommet insaturé, ou tel que l'unique arête de C qui lui est incidente fait partie de L . Alors la différence symétrique $C\Delta L$ est encore un couplage et on dit que ce dernier est obtenu par transfert le long de L .

Théorème

Un couplage C est maximum si et seulement si il n'existe pas de chaîne alternée augmentante relativement à C .

Notation

Soit $G=(V,E)$ un graphe et soit W un sous-ensemble de sommets. On notera G/W le graphe contracté ayant pour ensemble de sommets $V-W+\{w\}$ (on remplace W par un sommet w) et où deux sommets x et y sont reliés par une arête si $w\neq x,y$ et il existait une arête entre x et y dans G , ou si $x=w$ et y était relié à au moins un sommet de W dans G .

Propriété

Soit W l'ensemble des sommets d'un cycle élémentaire impair dans $G=(V,E)$, soit C^- un couplage dans G/W . Si w est insaturé dans C^- alors posons $C^+=C^-$; sinon, soit C^+ le couplage de G obtenu à partir de C^- en remplaçant l'arête incidente à w par une arête incidente à un sommet de W . Il existe alors un couplage maximum C^W dans $G[W]$ tel que $C=C^+\cup C^W$ est un couplage dans G .

Définition

Soit $G=(V,E)$ un graphe, soit C un couplage dans G et soit x un sommet insaturé. Un arbre alterné de racine x par rapport à un couplage C est un sous-graphe partiel $T=(V',E')$ connexe sans cycle de G tel que.

- x est le seul sommet insaturé de l'arbre
- pour tout y dans T , l'unique chaîne reliant x à y est une chaîne alternée
- pour tout sommet pendant y , l'unique arête incidente à y fait partie de C .

Si le nombre d'arêtes reliant x à un sommet y de T est pair, on dira que y est pair, sinon y est impair.

Remarque : dans un arbre alterné, le degré de chaque sommet impair est 2.

On va maintenant construire un arbre alterné. Nous noterons V^{pair} les sommets pairs de cet arbre. Au début, la construction de l'arbre se fera sur G . Mais après un certain nombre d'étapes, la construction pourra se poursuivre sur un graphe G' obtenu à partir de G à la suite de contractions sur divers cycles élémentaires impairs. Nous noterons $L_{y,z}$ l'unique chaîne de l'arbre alterné reliant y à z .

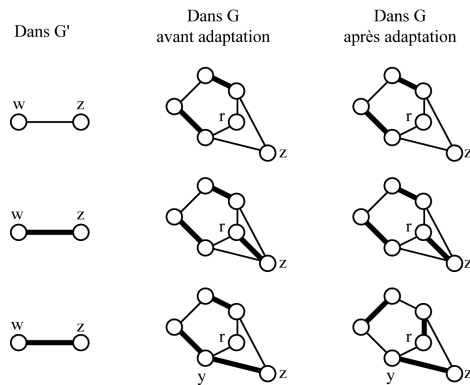
Algorithme de construction d'un arbre alterné ou détection d'une chaîne augmentante dans G

- 1) $V' := V^{\text{pair}} := \{x\}$; $E' := \emptyset$; $G' := G$; Considérer chaque sommet de G comme non marqué;
- 2) S'il existe un sommet $y \in V^{\text{pair}}$ et un sommet z insaturé non marqué tel que z est relié à y dans G'
Alors STOP : en rajoutant l'arête $[y,z]$ à $L_{x,y}$, on obtient une chaîne alternée augmentante.
- 3) S'il existe un sommet $y \in V^{\text{pair}}$ et un sommet z saturé non marqué tel que z est relié à y dans G'
Alors soit $[z,w]$ l'arête du couplage incidente à z : poser $V' := V' \cup \{z,w\}$; $V^{\text{pair}} := V^{\text{pair}} \cup \{w\}$, $E' := E' \cup \{[y,z],[z,w]\}$, marquer z et w et aller à 2)
- 4) S'il existe deux sommets y et $z \in V^{\text{pair}}$ tel que y est relié à z dans G' alors considérons l'ensemble W des sommets du cycle élémentaire impair $L_{yz} \cup \{[y,z]\}$. Soit r le sommet où les chaînes L_{xy} et L_{xz} se rejoignent : on dira que W est une orbite de racine r . Soit $T = (V', E' \cup \{[y,z]\})$: poser $T := T/W$, $G' := G'/W$, mettre le sommet remplaçant W dans V^{pair} et aller à 2)
- 5) STOP.

Algorithme de recherche d'un couplage maximum dans un graphe G quelconque

- 1) Choisir un couplage initial C .
- 2) S'il y a moins de deux sommets insaturés, alors STOP : le couplage C est maximum
Sinon, soit x un sommet insaturé : construire un arbre alterné de racine x
- 3) Si l'algorithme de construction d'un arbre alterné détecte une chaîne augmentante dans G' , alors poser C' égal au couplage obtenu par transfert le long de cette chaîne augmentante, reconstituer le couplage correspondant dans G en décontractant les cycles impairs, poser C égal à ce nouveau couplage et retourner à 2)
- 4) Sinon supprimer de G tous les sommets marqués. Et retourner à 2)

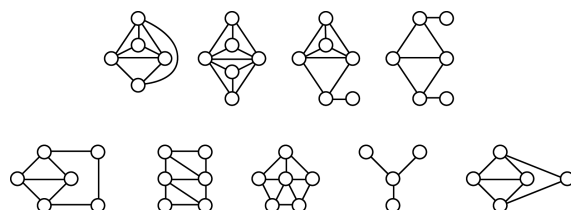
À l'étape 3, lorsqu'il s'agit de reconstituer un couplage dans G à partir d'un couplage C' dans G' , on s'y prend comme suit. Soit W une orbite de racine r qui a été transformée en un sommet w . Soit C^W l'ensemble des arêtes de C qui sont dans $G[W]$. Le couplage C^W sature tous les sommets de $G[W]$ sauf la racine r . Si C' ne passe pas par w alors on peut décontracter le cycle et rajouter C^W à C' . Sinon, C' contient une arête $[z,w]$. Si en décontractant le cycle, le sommet z est relié à r , alors on peut remplacer $[z,w]$ par $[z,r]$ et rajouter C^W à C' . Sinon, on peut remplacer $[z,w]$ par une arête $[z,y]$ où y est un voisin de z dans W , et on effectue un transfert de C^W le long de l'unique chaîne paire qui mène de y à r dans $G[W]$ (en d'autres termes, on remplace le couplage maximum C^W dans $G[W]$ par un couplage maximum laissant y insaturé au lieu de r). Les différents cas cités ci-dessus sont illustrés ci-dessous.



Il est donc facile de déterminer un couplage maximum dans un graphe quelconque. On en déduit qu'il est facile de déterminer un stable maximum dans n'importe quel graphe de ligne.

Théorème

G est un graphe de ligne si et seulement si il ne contient aucun des 9 graphes ci-dessous comme sous-graphe induit.



Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de déterminer en temps polynomial le nombre de stabilité d'un graphe qui ne contient pas de $K_{1,3}$ comme sous-graphe induit, où $K_{1,3}$ est le 8^e graphe ci-dessus. Cette classe de graphe, appelée la classe des **graphes sans $K_{1,3}$** contient donc strictement tous les graphes de ligne.

Transformation T_1

Soit $G=(V,E)$ un graphe quelconque et soit K une clique maximale dans G .
 Nous noterons $T_1(G,K)$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant tous les sommets de K et en reliant deux sommets de G si l'union de leur voisinage contenait K .
 Plus précisément : $T_1(G,K)$ a pour ensemble de sommets $V-K$ et deux sommets x et y sont reliés dans $T_1(G)$ si et seulement si $[x,y] \in E$ ou $K \subseteq N_G(x) \cup N_G(y)$ (où $N_G(x)$ représente l'ensemble des voisins de x dans G)

Propriété

Soit G un graphe sans $K_{1,3}$ et soit K une clique maximale de G telle que $\alpha(G[N_G(K)]) \leq 2$.
 Alors $T_1(G,K)$ est un graphe sans $K_{1,3}$ et $\alpha(T_1(G,K)) = \alpha(G) - 1$.

Transformation T_2

Soit $G=(V,E)$ un graphe quelconque et soit x un sommet de G . Soit D l'ensemble des sommets à distance 2 de x , et soit W l'ensemble des sommets y de D tel que $N_G(x) - N_G(y)$ induit une clique dans G .
 Nous noterons $T_2(G,x)$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant x , tous les sommets de $N_G(x)$ ainsi que ceux de W , et en reliant entre eux tous les sommets de $D-W$.

Propriété

Soit G un graphe sans $K_{1,3}$ et soit x un sommet tel que $\theta(G[N_G(x)]) > 2$.
 Alors $T_2(G,x)$ est un graphe sans $K_{1,3}$ et $\alpha(T_2(G,x)) = \alpha(G) - 2$

Théorème

Soit G un graphe. Si à chaque sommet x de G on peut associer deux cliques maximales K_1 et K_2 dans $G[N_G(x)]$ tel que

- o $K_1 \cup K_2 = N_G(x)$
- o $\alpha(G[N_G(K_1 \cup \{x\})]) > 2$
- o $\alpha(G[N_G(K_2 \cup \{x\})]) > 2$

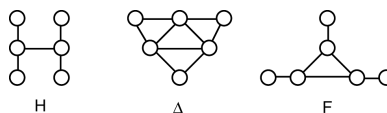
Alors G est un graphe de ligne.

Dans l'algorithme ci-dessous, on note n le nombre de sommets dans le graphe G .

Algorithme de détermination du nombre de stabilité dans un graphe G sans $K_{1,3}$

- 1) $c := 0$;
- 2) Poser $i := 1$. Si G est vide alors aller à 6); sinon numéroté les sommets du graphe v_1, v_2, \dots, v_n .
- 3) Si $\theta(G[N_G(v_i)]) > 2$ alors poser $G := T_2(G, v_i)$, $c := c + 2$, et retourner à 2)
- 4) Si $\theta(G[N_G(v_i)]) < 2$ alors poser $G := T_1(G, N_G(v_i) \cup \{v_i\})$, $c := c + 1$, et retourner à 2)
 (c'est-à-dire qu'on ôte v_i et ses voisins qui forment une clique, on augmente c d'une unité et on retourne à 2)
- 5) Soient K_1 et K_2 deux cliques maximales tel que $K_1 \cup K_2 = N_G(v_i)$.
 - o Si $\alpha(G[N_G(K_1 \cup \{v_i\})]) \leq 2$ alors poser $G := T_1(G, K_1 \cup \{v_i\})$, $c := c + 1$, et retourner à 2)
 - o Si $\alpha(G[N_G(K_2 \cup \{v_i\})]) \leq 2$ alors poser $G := T_1(G, K_2 \cup \{v_i\})$, $c := c + 1$, et retourner à 2)
- 6) Si $i < n$ alors poser $i := i + 1$ et aller à 3) sinon poser $c := c + \alpha(G)$ (où G est maintenant un graphe de ligne) et STOP

Dans ce qui suit, nous allons utiliser les graphes H , Δ et F suivants



Définition

Un graphe a la propriété KS si pour tout sous-graphe G' de G et pour toute clique maximale K il existe un stable de cardinalité maximum S tel que $K \cap S \neq \emptyset$.

Si on supprime une clique maximale dans un graphe G ayant la propriété KS, on est alors sûr d'avoir diminué d'une unité la cardinalité d'au moins un stable maximum dans G .

Théorème

Un graphe G a la propriété KS si et seulement si G ne contient pas H ou Δ comme sous-graphe induit

Preuve

- 1) Si G contient H ou Δ comme sous-graphe induit alors il est facile de vérifier qu'il existe une clique maximale K et un stable de cardinalité maximum S tel que $K \cap S = \emptyset$.
- 2) Supposons que G ne contient pas de H ou Δ comme sous-graphe induit et supposons qu'il existe une clique maximale K telle que pour tout stable de cardinalité maximum S on a $K \cap S = \emptyset$.
 - o Pour tout x dans K et pour tout S de cardinalité maximum on a $|N_G(x) \cap S| \geq 2$ car sinon $S' = (S \cup \{x\}) - N_G(x)$ serait un stable de cardinalité maximum avec $K \cap S' \neq \emptyset$.
 - o Pour toute paire de sommets x et y dans K on a $N_G(x) \cap N_G(y) \cap S \neq \emptyset$ car sinon G contiendrait un H comme sous-graphe induit.
 - o Soit S un stable de cardinalité maximum et $v \in S$ qui maximise $|N_G(v) \cap K|$. Soit $N_G(v) \cap K = \{x_1, \dots, x_p\}$. Comme K est une clique maximale, il existe w dans K tel que $w \notin \{x_1, \dots, x_p\}$. Soit $T = N_G(x_p) \cap N_G(w) \cap S$ et soit $y \in T$. Il existe au moins un x_i non adjacent à y par maximalité de v . Notons $q(y)$ le plus petit indice tel que y n'est pas voisin de $x_{q(y)}$.
 - o Soit z le sommet de T qui maximise $q(z)$ et soit $r \in N_G(x_{q(z)}) \cap N_G(w) \cap S$. Si $r \notin T$ alors les sommets $x_{q(z)}$, x_p, w, v, z et r induisent un Δ dans G . Sinon, les sommets $x_{q(r)}$, $x_{q(z)}$, w, v, z et r induisent un Δ dans G .

Théorème

Soit G un graphe

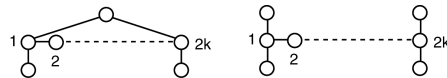
Alors $\alpha(T_1(G', K)) = \alpha(G') - 1$ pour tout sous-graphe induit G' de G et pour toute clique maximale K dans G'
 $\Leftrightarrow G$ ne contient pas de H, Δ ou F comme sous-graphe induit.

Preuve

- 1) L'arête horizontale de H est une clique maximale K telle que $\alpha(T_1(H, K)) = \alpha(H) - 2$.
 Le triangle central de Δ est une clique maximale K telle que $\alpha(T_1(\Delta, K)) = \alpha(\Delta) - 2$.
 Le triangle central de F est une clique maximale K telle que $\alpha(T_1(F, K)) = \alpha(F)$.
- 2) Supposons que G ne contienne pas de H, Δ ou F comme sous-graphe induit et soit K une clique maximale. Soit S un stable maximum tel que $K \cap S \neq \emptyset$ et soit $x \in K \cap S$. S'il existe deux sommets y et z dans $S - \{x\}$ alors y et z ne sont pas reliés dans $T_1(G, K)$ car x n'est ni voisin de y ni de z . Donc $S - \{x\}$ est un stable de $T_1(G, K)$, et donc $\alpha(T_1(G, K)) \geq \alpha(G) - 1$.
 Soit S' un stable de cardinalité maximum dans $T_1(G, K)$
 - o S'il existe un sommet v dans K tel que $N_G(v) \cap S' = \emptyset$ alors $S' \cup \{v\}$ est stable dans G et $\alpha(G) \geq \alpha(T_1(G, K)) + 1$.
 - o Sinon $N_G(v) \cap S' \neq \emptyset$ pour tout v dans K . Si $N_G(v) \cap S' \subset N_G(w) \cap S'$ pour 2 sommets v et w de K alors on notera $w \mathcal{R} v$. Soit K' le sous-ensemble de sommets de K qui sont minimaux par rapport à cette relation \mathcal{R} , soit x un sommet de K' et soit s_1 un sommet de $N_G(x) \cap S'$.
 - Comme K est une clique maximale, il existe y dans $K - N_G(s_1)$. On peut supposer $y \in K'$.
 - Comme x et y sont dans K' , il existe s_2 dans $(N_G(y) \cap S') - N_G(x)$.
 - Comme s_1 et s_2 sont non-adjacents dans $T_1(G, K)$, il existe z dans $K - (N_G(s_1) \cup N_G(s_2))$.
 - Comme x est dans K' il existe s_3 dans $(N_G(z) \cap S') - N_G(x)$.
 - Si s_3 n'est pas adjacent à y alors x, y, z, s_1, s_2 et s_3 induisent un F dans G , contradiction. Sinon, étant donné que y est dans K' il existe s_4 dans $(N_G(z) \cap S') - N_G(y)$. Mais alors x, y, z, s_1, s_2 et s_4 induisent un F dans G si $s_4 \notin N_G(x)$, ou x, y, s_1, s_2, s_3 et s_4 induisent un H dans G si $s_4 \in N_G(x)$, contradiction.

Définition

Un graphe est dit sans AH s'il ne contient aucun des graphes ci-dessous comme sous-graphe induit.



Théorème

Si G est sans AH, alors $T_1(G, K)$ est également sans AH, quelle que soit la clique maximale K dans G .

Corollaire

Le nombre de stabilité des graphes sans AH peut être déterminé en temps polynomial.

Posiformes et graphes de conflit

Une **posiforme** est une fonction booléenne f sur n variables booléennes x_1, \dots, x_n qui peut s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=1}^p \omega_i \prod_{j \in A_i} x_j \prod_{k \in B_i} \bar{x}_k$$

avec $A_i, B_i \subseteq \{1, \dots, n\}$ et $A_i \cap B_i = \emptyset$ pour tout $i=1, \dots, p$ et où les ω_i sont des nombres réels strictement positifs

Exemple : $2x_1 + 3x_2 + x_1x_2 + x_2\bar{x}_3$

Définition

À toute posiforme on peut associer un **graphe de conflit** $G_f=(V,E)$ où $V=\{1, \dots, p\}$ et deux sommets i et j sont reliés par une arête si et seulement si $(A_i \cap B_j) \cup (A_j \cap B_i) \neq \emptyset$. À chaque sommet i de V on associe un poids ω_i .

Propriété

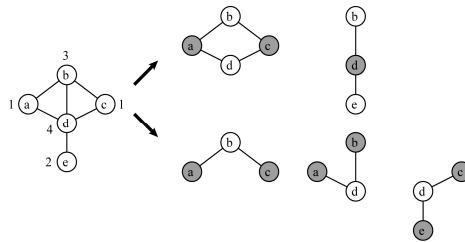
Le poids maximum d'un stable dans G_f est égal à la valeur maximale de f .

Inversement, soit $G=(V,E)$ un graphe pondéré. On peut lui associer plusieurs posiformes f_G telles que déterminer un stable de poids maximum dans G est équivalent à déterminer les valeurs de x_1, \dots, x_n qui maximisent f_G .

Pour construire une telle posiforme f_G on s'y prend comme suit :

- considérer un recouvrement des arêtes de G par des graphes bipartis complets qui sont des sous-graphes partiels de G . Notons $G_i=(V_i, W_i, E_i)$ ($i=1, \dots, p$) ces sous-graphes.
- Déterminer $A_v=\{i \text{ tel que } v \in V_i\}$ et $B_v=\{i \text{ tel que } v \in W_i\}$ pour tout v dans V .
- Poser $f_G = \sum_{v=1}^{|V|} \omega_v \prod_{j \in A_v} x_j \prod_{k \in B_v} \bar{x}_k$ où ω_v est le poids du sommet v dans V .

Exemple : Pour le graphe représenté ci-dessous (les chiffres indiquent les poids des sommets), les deux recouvrements proposés donnent les deux posiformes $x_1 + 3x_1\bar{x}_2 + x_1 + 4x_2\bar{x}_1 + 2\bar{x}_2$ et $x_1x_2 + 3x_2\bar{x}_1 + x_1x_3 + 4\bar{x}_2\bar{x}_3 + 2x_3$ (avec pour convention que les sommets gris sont dans V_i et les blancs sont dans W_i)



Toutes les posiformes associées à G ont cependant la même valeur optimale qui correspond au poids maximum d'un stable dans G .

Soit $G=(V,E)$ un graphe non pondéré. Nous allons considérer un recouvrement particulier de ses arêtes par des graphes bipartis complets.

- o Choisissons tout d'abord un sommet x dans V et soient v_1, \dots, v_p ses voisins. Soit $W=V-\{x, v_1, \dots, v_p\}=\{v_{p+1}, \dots, v_n\}$
- o Pour chaque v_i $i=1, \dots, p$ considérons le graphe biparti complet $G_i=(V_i, W_i, E_i)$ où
 - $V_i=\{v_i\}$
 - $W_i=\{v_j \text{ tel que } v_j \in N(v_i) \text{ et } j>i\} \cup \{x\}$
- o Pour chaque v_i $i=p+1, \dots, n-1$ considérons le graphe biparti complet $G_i=(V_i, W_i, E_i)$ où
 - $V_i=\{v_i\}$
 - $W_i=\{v_j \text{ tel que } v_j \in N(v_i) \text{ et } j>i\}$
- o $f_G = \prod_{i=1}^p \bar{x}_i + \sum_{i=1}^n x_i \prod_{v_j \in N(v_i)} \bar{x}_j$ est une posiforme associée à G .

Propriétés

- $\prod_{i=1}^p \bar{x}_i = 1 - \sum_{i=1}^p x_i \prod_{j<i} \bar{x}_j$
- $\prod_{i=1}^p \bar{x}_i + \sum_{i=1}^p x_i \prod_{\substack{v_j \in N(v_i) \\ j<i}} \bar{x}_j = 1 + \sum_{i=2}^p \sum_{\substack{v_j \notin N(v_i) \\ j<i}} x_i x_j \prod_{k<j} \bar{x}_k \prod_{\substack{v_k \in N(v_i) \\ j<k<i}} \bar{x}_j$

Corollaire

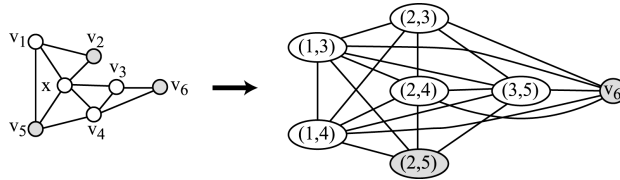
$$f_G = 1 + \sum_{i=2}^p \sum_{\substack{v_j \notin N(v_i) \\ j<i}} x_i x_j \prod_{k<j} \bar{x}_k \prod_{\substack{v_k \in N(v_i) \\ j<k<i}} \bar{x}_j + \sum_{i=p+1}^n x_i \prod_{v_j \in N(v_i)} \bar{x}_j$$

On en déduit que f_G est égale à 1 + une posiforme f' . Soit G' le graphe de conflit associé à f' . On dit que G' est obtenu à partir de G par **STRUCTION** (STability number RedUCTION) et on notera $G' = S(G, x)$.

Algorithme de construction de $S(G, x)$ à partir de G (où x est un sommet quelconque dans G).

- Soient v_1, \dots, v_p les voisins de x et soit $W = V - \{x, v_1, \dots, v_p\} = \{v_{p+1}, \dots, v_n\}$. Conserver tel quel le sous-graphe $G[W]$
- Créer un sommet (j, i) pour toute paire de sommets v_j, v_i tel que $1 \leq j < i \leq p$ et $v_j \notin N(v_i)$.
- Relier (j, i) à (j', i') si $j \neq j'$
- Relier (j, i) à (j, k) si $v_i \in N(v_k)$
- Relier (j, i) à v_k ($k > p$) si $v_k \in N(v_i) \cup N(v_j)$

Exemple :



Propriété $\alpha(G) = 1 + \alpha(S(G, x))$.

Preuve (sans passer par les posiformes)

1) Soit S un ensemble stable maximum dans G .

- si $S \cap \{x, v_1, \dots, v_p\}$ ne contient qu'un sommet alors $S - \{x, v_1, \dots, v_p\}$ est un stable dans $S(G, x)$.
 - sinon, soit $S \cap \{v_1, \dots, v_p\} = \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}$ avec $i_1 < \dots < i_r$: $(S - \{v_{i_1}, \dots, v_{i_r}\}) \cup \{(i_1, i_2), (i_1, i_3), \dots, (i_1, i_r)\}$ est stable dans $S(G, x)$
- On en déduit que $\alpha(S(G, x)) \geq \alpha(G) - 1$

2) Soit S un ensemble stable maximum dans $S(G, x)$.

- si S ne contient aucun nouveau sommet (i, j) alors $S \cup \{x\}$ est stable dans G
- sinon, soient $(i, j_1), \dots, (i, j_r)$ les nouveaux sommets dans S : $(S - \{(i, j_1), \dots, (i, j_r)\}) \cup \{v_i, v_{j_1}, \dots, v_{j_r}\}$ est stable dans G .

On en déduit que $\alpha(G) \geq \alpha(S(G, x)) + 1$

La construction de $S(G, x)$ se fait en $O(|V|^2)$ et on peut calculer $\alpha(G)$ en appliquant au plus $|V|$ fois cette transformation.

q-stabilité

Soient $G_1 = (V_1, E_1)$ et $G_2 = (V_2, E_2)$ deux graphes. Le graphe $G_1 + G_2 = G(V, E)$ est défini comme suit

- $V = \{(x, y) \text{ tel que } x \in V_1 \text{ et } y \in V_2\}$
- $E = \{[(x, y), (z, w)] \text{ tel que } x = z \text{ et } [y, w] \in E_2 \text{ ou } y = w \text{ et } [x, z] \in E_1\}$

Définition

Le nombre de q-stabilité $\alpha_q(G)$ est le plus grand nombre de sommets colorables en q couleurs dans G .

Propriétés

- (a) $\alpha_1(G) = \alpha(G)$
- (b) $\chi(G) = \min \{q \text{ tel que } \alpha_q(G) = |V|\}$
- (c) $\alpha_q(G) = \alpha(G + K_q)$ où K_q est une clique à q sommets.