Colorations

On a déjà démontré les propriétés suivantes :

- $q(G) \geq \Delta(G)$ pour tout graphe G
- $\chi(G) \geq \omega(G)$ pour tout graphe G
- $q(G) = \Delta(G)$ pour tout graphe biparti G

On peut démontrer d'autres relations. Dans toutes ces relations l'ensemble V représente l'ensemble des sommets de G.

Propriété. $\chi(G) + \alpha(G) \leq |V| + 1$

Preuve

Soit S un ensemble stable maximum. On peut colorer les sommets de V-S en $|V - S|$ couleurs et les sommets de S en une couleur. On peut donc colorer G en $|V - S| + 1 = |V| - \alpha(G) + 1$ couleurs.

Propriété. $\chi(G)\alpha(G) \geq |V|$

Preuve

Chaque couleur ne peut contenir qu'au maximum $\alpha(G)$ sommets.

Propriété. $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V| + 1$

Preuve

Pour $|V|$=1 ou 2, le résultat est trivial. Raisonnons par induction. Supposons le résultat vrai pour tout graphe ayant moins de $|V|$ sommets, et considérons le graphe G' obtenu à partir de G en supprimant un sommet x. Il est clair que $\chi(G) \leq \chi(G') + 1$ et $\chi(\overline{G}) \leq \chi(\overline{G'}) + 1$.

- Si $\chi(G) = \chi(G') + 1$ et $\chi(\overline{G}) = \chi(\overline{G'}) + 1$ alors $\deg_G(x) \geq \chi(G')$ et $\deg_{\overline{G}}(x) \geq \chi(\overline{G'})$.

  On a donc $\chi(G') + \chi(\overline{G'}) \leq \deg_G(x) + \deg_{\overline{G}}(x) = |V| - 1$, ce qui implique $\chi(G) + \chi(\overline{G}) = \chi(G') + \chi(\overline{G'}) + 2 \leq |V| + 1$.
- Sinon $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq \chi(G') + \chi(\overline{G'}) + 1 \leq |V| + 1$.

Propriété. $\chi(G)\chi(\overline{G}) \leq \left\lfloor \left(\frac{|V| + 1}{2} \right)^2 \right\rfloor$

Preuve

$$(|V| + 1)^2 \geq \left(\chi(G) + \chi(\overline{G})\right)^2 = \left(\chi(G) - \chi(\overline{G})\right)^2 + 4\chi(G)\chi(\overline{G}) \geq 4\chi(G)\chi(\overline{G})$$

Propriété. Si G est une clique alors $q(G) = \begin{cases} |V| - 1 & \text{si } |V| \text{ est pair} \\ |V| & \text{si } |V| \text{ est impair} \end{cases}$

Preuve

Notons $|V|$=n et numérotons les sommets 0,1,…, n-1. Supposons tout d'abord que n est pair. Donnons la couleur 1 au couplage constitué des arêtes (0,1), (2,n-1), (3,n-2),…,(n/2,n/2+1). Rajoutons 1 à chacun des numéros des arêtes de ce couplage, sauf à 0, et sauf à n-1 qui devient 1 : on obtient un deuxième couplage et donc une deuxième couleur. En répétant ceci on couvrira toutes les arêtes de G en n-1 couleurs, et on a donc q(G)≤n-1. Mais q(G)≥Δ(G)=n-1. On en déduit donc que q(G)=n-1

Supposons maintenant n impair. Rajoutons un sommet relié à tous les autres (on obtient donc une clique à n+1 sommets). D'après ce qui est démontré ci-dessus, on peut colorer les arêtes de cette plus grosse clique en (n+1)-1=n couleurs. On peut donc colorer les arêtes de G en n couleurs. Un couplage maximum dans G contient (n-1)/2 arêtes et comme G contient n(n-1)/2 arêtes, on sait que q(G) ≥n. On en déduit que q(G)=n.

Propriété. $q(G) \leq 2\Delta(G)-1$
Preuve
En colorant séquentiellement les arêtes de G, chaque arête ne peut avoir qu'au plus $2(\Delta(G)-1)$ arêtes adjacentes.

Théorème de Vizing $q(G) \leq \Delta(G)+1$

On sait donc que pour tout graphe G on a $\Delta(G) \leq q(G) \leq \Delta(G)+1$. Il est cependant NP-complet de déterminer si q(G) est égal à $\Delta(G)$ ou a $\Delta(G)+1$.

Théorème de Szekeres et Wilf
Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur les graphes et telle que

1. $f(G') \leq f(G)$ pour tout sous-graphe induit G' de G
2. $f(G) \geq \min_{x \in G} \deg_G(x)$

Alors $\chi(G) \leq f(G)+1$
Preuve
Soit G' un sous-graphe induit de G tel que $\chi(G') = \chi(G)$ et $\chi(G'-x) < \chi(G)$ pour tout x dans G'. On a donc $\deg_{G'}(x) \geq \chi(G)-1$ pour tout x dans G', ce qui implique $\chi(G)-1 = \chi(G')-1 \leq \min_{x \in G'} \deg_{G'}(x) \leq f(G') \leq f(G)$.

Corollaire $\chi(G) \leq 1 + \max_{G' \subseteq G}\left(\min_{x \in G'} \deg_{G'}(x)\right)$
Preuve
Poser $f(G)= \max_{G' \subseteq G}\left(\min_{x \in G'} \deg_{G'}(x)\right)$

Propriété
Soit v_i le sommet de plus petit degré dans le sous graphe G_i de G induit par $V-\{v_1,\ldots,v_{i-1}\}$ et soit $h(G) = \max_i \deg_{G_i}(v_i)$.

Alors $h(G)= \max_{G' \subseteq G}\left(\min_{x \in G'} \deg_{G'}(x)\right)$
Preuve

1. $h(G)= \max_{G_i}\left(\min_{x \in G_i} \deg_{G_i}(x)\right) \leq \max_{G' \subseteq G}\left(\min_{x \in G'} \deg_{G'}(x)\right) = f(G)$.
2. Soit G' un sous-graphe induit de G et soit v_i le sommet de plus petit indice faisant partie de G'. On a donc $G' \subseteq G_i$ ce qui implique $\deg_{G'}(v_i) \leq \deg_{G_i}(v_i)$. Donc $\min_{x \in G'} \deg_{G'}(x) \leq \deg_{G'}(v_i) \leq \deg_{G_i}(v_i) \leq h(G)$, et comme ceci est vrai pour tout sous graphe G', on a $f(G)= \max_{G' \subseteq G}\left(\min_{x \in G'} \deg_{G'}(x)\right) \leq h(G)$.

Algorithme de coloration en $1 + \max_{G' \subseteq G}\left(\min_{x \in G'} \deg_{G'}(x)\right)$ couleurs

1. Déterminer les sommets $v_1,\ldots,v_n$
2. Colorer les sommets séquentiellement de v_n à v_1.

Propriété $\chi(G) \leq \Delta(G)+1$
Preuve
Une coloration séquentielle dans n'importe quel ordre n'utilisera jamais plus de $\Delta(G)+1$ couleurs.

Théorème de Brooks Soit G un graphe connexe. Si $\Delta(G)\geq 3$ et si G n'est pas une clique de $\Delta(G)+1$ sommets, alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

Preuve

Faisons un raisonnement par contradiction. Soit G le graphe ayant le moins de sommets parmi ceux qui contredisent le théorème, soit x un sommet de G et soient $y_1,\ldots,y_r$ ses voisins. On a donc $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ et $\Delta(G\text{-}x) \leq \Delta(G)$.

1. Si $\Delta(G\text{-}x)\leq \Delta(G)\text{-}1$ alors, par la propriété précédente, on peut colorer G-x en au plus $\Delta(G)$ couleurs. Si $\Delta(G\text{-}x)= \Delta(G)$, G-x n'est pas une clique de $\Delta(G)+1$ sommets (car la connexité de G impliquerait $\Delta(G) = \Delta(G\text{-}x)+1=\Delta(G)+1$, contradiction). Par minimalité de G on peut donc colorer G-x en $\Delta(G)$ couleurs. Dans tous les cas, on peut colorer G-x en $\Delta(G)$ couleurs.
2. Soit C une telle coloration de G-x en $\Delta(G)$ couleurs. Si $r<\Delta(G)$ ou si l'une des $\Delta(G)$ couleurs n'apparaît pas dans le voisinage de x, on peut compléter C en donnant à x une couleur n'existant pas dans son voisinage$\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$, contradiction.
3. Sans perte de généralité, on peut supposer y_i de couleur i. Notons C_{ij} le sous-graphe de G-x contenant tous les sommets de couleur i ou j. Soient i et j deux couleurs. Si y_i et y_j ne font pas partie de la même composante connexe de C_{ij} alors on peut permuter les couleurs i et j dans la composante connexe contenant y_i, et la couleur i devient disponible pour x et on peut donc colorer G en $\Delta(G)$ couleurs, contradiction.
4. Montrons maintenant que la composante connexe contenant i et j est une chaîne. Si y_i a 2 voisins de couleur j alors il a au plus $\Delta(G)\text{-}3$ voisins de couleur $\neq i,j$. Il manque donc une couleur autour de y_i, et je peux la lui donner et colorer x avec la couleur i$\Rightarrow \chi(G) \leq \Delta(G)$, contradiction. De même, y_j ne peut pas avoir deux voisins de couleur i. S'il existe un sommet $z\neq y_i,y_j$ de degré 3 dans cette composante connexe, alors choisissons un tel z le plus proche possible de y_i, alors z a au plus $\Delta(G)\text{-}3$ voisins de couleur $\neq i,j$. Il manque donc une couleur autour de z. Colorons z avec cette couleur: y_i et y_j ne font alors plus partie de la même composante connexe de C_{ij}, contradiction.
5. Notons P_{ij} la composante connexe de C_{ij} contenant y_i et y_j. Montrons que $P_{ij}\cap P_{ik}=\{y_i\}$. S'il existe $z\neq y_i$ dans $P_{ij}\cap P_{ik}$ alors ce sommet a deux voisins de couleur j et deux voisins de couleur k. Le sommet z a donc au plus $\Delta(G)\text{-}4$ voisins de couleur $\neq i,j,k$. Il lui manque ainsi une couleur dans son voisinage. En la lui donnant, y_i et y_j ne font plus partie de la même composante connexe de C_{ij}, contradiction.
6. Comme G n'est pas une clique de $\Delta(G)+1$ sommets, il existe y_i et y_j non reliés par une arête. Soit z le 1^{er} voisin de y_i sur P_{ij} et soit $k\neq i,j$ (cette couleur k existe puisque $\Delta(G)\geq 3$). En permutant les couleurs i et k dans P_{ik} on obtient une nouvelle coloration de G avec $z\in P_{jk}\cap P_{ij}$, contradiction.

Définitions

- Soit G un graphe. Un *ordre* de ses sommets est dit *parfait* si dans toute chaîne induite sans corde P=[a,b,c,d] sur 4 sommets, on a b avant a ou/et c avant d. En d'autres termes, un ordre parfait induit une orientation sans circuit dans G telle que pour tout P=[a,b,c,d] induit, on a $b\rightarrow a$ ou/et $c\rightarrow d$.
- Un graphe G est *parfaitement ordonnable* s'il existe un ordre parfait de ses sommets.

Théorème Si G est parfaitement ordonnable alors on peut colorer ses sommets en $\chi(G)=\omega(G)$ couleurs.

Preuve

Colorons les sommets de G de manière séquentielle, en utilisant un ordre parfait. Soit k le nombre de couleurs utilisé, et soit i le plus petit indice tel que il existe une clique Q dans G dont les sommets sont colorés avec les couleurs $i+1,\ldots,k$. On a $i<k\text{-}1$ car tout sommet de couleur k a un prédécesseur de couleur k-1. Supposons $i\geq 1$. Chaque sommet x de Q a un voisin p(x) de couleur i qui le précède. Montrons la propriété suivante :

$$\text{pour tout } A\subseteq Q \text{ il existe } x\in A \text{ tel que } A\cup\{p(x)\} \text{ est une clique.} \qquad (*)$$

Si A ne contient qu'un sommet, appelons-le x, alors $A\cup\{p(x)\}$est une arête et donc une clique. Prouvons donc (*) par induction sur le nombre de sommets de A. Soit x quelconque dans A. Il existe $y\in A\text{-}\{x\}$ tel que $(A\text{-}\{x\}) \cup\{p(y)\}$ est une clique. Si p(y) est également relié à x alors $A\cup\{p(x)\}$ est une clique. Si (*) est faux, il existe donc pour tout x dans A un sommet y de A tel que p(y) n'est pas relié à x, mais est relié à tout sommet de $A\text{-}\{x\}$. Notons $y=\varphi(x)$. La fonction φ est injective car si $a\neq b$ alors $p(\varphi(a))$ est relié à b mais pas à a et $p(\varphi(b))$ est relié à a mais pas à b, donc $\varphi(a)\neq\varphi(b)$. La fonction φ est donc une bijection. Soit x le premier sommet de A selon l'ordre parfait. Soit y tel que $\varphi(y)=x$ et soit z tel que $\varphi(z)=y$. On a une chaîne sans corde P(p(y),y,z,p(x)) avec $p(x)\rightarrow z$ et $p(y)\rightarrow y$, contradiction.
On a donc démontré (*) et il existe ainsi x dans Q tel que $Q\cup\{p(x)\}$ est une clique. On en déduit que i=0. Q est donc une clique de k sommets et on a $k \leq \omega(G) \leq\chi(G) \leq k$ d'où on déduit $\chi(G)=\omega(G)$.

Algorithme de coloration d'un graphe parfaitement ordonnable

1. Déterminer un ordre parfait (problème NP-dur)
2. Colorer séquentiellement selon l'ordre parfait

Algorithme de détermination d'une clique maximum dans un graphe parfaitement ordonnable

1. Déterminer une coloration minimale à l'aide de l'algorithme ci-dessus
2. Soit x un sommet de couleur $\chi(G)$. Poser $k := \chi(G)$, $Q := \{x\}$
3. Tant que k >1 faire

   Déterminer un sommet y de couleur k-1 voisin de chaque sommet de Q, poser $Q := Q \cup \{y\}$ et $k := k-1$

Définition Un graphe est *planaire* s'il est possible de le représenter sur le plan de telle sorte que ses arêtes ne se croisent pas. Une telle représentation s'appelle un *graphe planaire topologique*.

Propriété Dans un graphe planaire topologique, les contours des faces finies forment une base de cycles

Corollaire Dans un graphe planaire topologique connexe G=(V,E), le nombre F de faces est égal à $|E|-|V|+2$.

Corollaire Dans tout graphe planaire G, il existe un sommet de degré ≤5

Preuve

On peut supposer G connexe car sinon il suffit de faire la preuve sur une composante connexe de G. Considérons une représentation topologique planaire de G. Soit m(f) le nombre d'arêtes sur la face f. Faisons la somme des m(f) pour toute face f. On obtient $2|E|$. Comme chaque face a au moins 3 arêtes, on a $2|E| \geq 3F = 3(|E|-|V|+2)$.

Si chaque sommet est de degré ≥6 alors la somme des degrés donne $2|E| \geq 6|V|$.

En résumé, $\frac{2}{3}|E| \geq F = |E|-|V|+2 \geq |E|-\frac{1}{3}|E|+2 = \frac{2}{3}|E|+2$, contradiction.

Théorème Si G est planaire alors $\chi(G) \leq 5$.

Preuve algorithmique.

Par induction sur le nombre de sommets de G. Il est clair qu'on peut colorer tout graphe planaire de moins de 6 sommets en ≤5 couleurs. Supposons que l'on sache colorer tout sous graphe propre de G en ≤5 couleurs. Soit x dans G de degré≤5. Colorons G-x en ≤5 couleurs. Si x n'a pas les 5 couleurs dans son voisinage alors on peut colorer x avec l'une des 5 couleurs. Sinon, notons y_i le voisin de couleur i (i=1,…,5), et notons C_{ij} le sous-graphe contenant les sommets de couleur i ou j. Considérons une représentation topologique planaire de G et sans perte de généralité, supposons que les couleurs autour de x apparaissent dans l'ordre 1,2,…,5 selon le sens anti-horaire. Si y_1 et y_3 ne font pas partie de la même composante connexe de C_{13} alors on peut permuter les couleurs 1 et 3 dans la composante connexe de C_{13} contenant y_1 et colorer ensuite x avec la couleur 1. Sinon y_2 et y_4 ne font pas partie de la même composante connexe de C_{24} et on peut permuter les couleurs 2 et 4 dans la composante connexe de C_{24} contenant y_2 et colorer ensuite x avec la couleur 2.

Théorème Si G est planaire alors $\chi(G) \leq 4$