

Les graphes planaires

Complément au chapitre 2 « Les villas du Bellevue »

Dans le chapitre « Les villas du Bellevue », Manori donne la définition suivante à Sébastien.

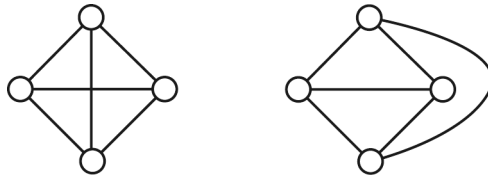
Définition

Un graphe est « planaire » si on peut le dessiner sur une feuille de papier sans que les arêtes se croisent.

Une telle représentation s'appelle un « graphe planaire topologique ».

Par exemple, le graphe de gauche ci-dessous est planaire parce qu'en modifiant le tracé d'une arête je peux obtenir le graphe de droite qui est en fait une représentation différente du même graphe, mais sans croisement d'arête.

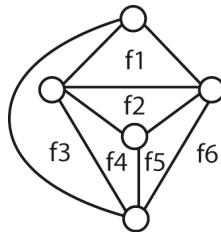
D'après la définition ci-dessus, ces 2 graphes sont planaires, mais seul celui de droite est planaire topologique.



Définition

Dans un graphe planaire topologique, les zones délimitées par des arêtes qui les entourent sont appelées des « faces ».

Par exemple, dans le graphe qui représente la villa des Courtel, on a 6 faces notées de f1 à f6. Notons que le contour extérieur d'un graphe planaire topologique est également une face. Il s'agit dans notre exemple de la face f6.



Soit S le nombre de sommets d'un graphe planaire topologique, A son nombre d'arêtes et F son nombre de faces. Euler a démontré la propriété suivante.

Propriété 1

Dans tout graphe planaire topologique connexe, on a

$$F = A - S + 2.$$

Cette propriété permet de démontrer de nombreux résultats. Par exemple, en notant P le plus petit nombre d'arêtes délimitant une face, on a le résultat suivant.

Propriété 2

Tout graphe planaire topologique connexe avec S sommets et dont la plus petite face comporte P arêtes contient au plus $\frac{P}{P-2}(S-2)$ arêtes.

Preuve

Soit G un graphe planaire topologique connexe avec S sommets, A arêtes, F faces et tel que le pourtour de chaque face comporte au moins P arêtes. D'après la propriété d'Euler, on a $F = A - S + 2$.

En faisant la somme des nombres d'arêtes autour de chaque face on obtient exactement le double du nombre d'arêtes. En effet, chaque arête est comptée à double puisqu'elle apparaît sur le pourtour de deux faces exactement.

Comme le pourtour de chaque face contient au moins P arêtes, on a $2A \geq PF$.

En utilisant la propriété d'Euler, cette dernière inégalité se réécrit comme suit :

$$2A \geq P(A-S+2)$$

c'est-à-dire, en regroupant les A à droite :

$$\frac{P}{P-2}(S-2) \geq A \quad \square$$

Grâce à cette propriété, tel que l'a fait Manori pour prouver l'exagération toute marseillaise de Courtel, on peut montrer qu'un graphe planaire connexe avec S sommets ne peut pas contenir plus de $3S-6$ arêtes.

Propriété 3

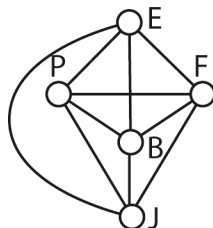
Tout graphe planaire connexe avec S sommets contient au plus $3(S-2)$ arêtes.

Preuve

Soit G un graphe planaire connexe avec S sommets et A arêtes. Considérons une représentation R de G dans laquelle les arêtes ne se croisent pas. R est donc planaire topologique et a le même nombre de sommets et d'arêtes que G . Soit P le plus petit nombre d'arêtes sur le pourtour d'une face de R .

Comme chaque face contient au moins 3 arêtes sur son pourtour, on a $P \geq 3$ et la propriété 2 nous montre donc que $3(S-2) \geq \frac{P}{P-2}(S-2) \geq A$. □

Ainsi, le graphe ci-dessous, correspondant à la description faite par Courtel de sa villa, ne peut pas être planaire puisque $3(S-2)$ vaut 9 alors que A vaut 10.



Supposons maintenant qu'aucune face d'un graphe planaire n'est un triangle. En d'autres termes, supposons qu'en choisissant trois sommets quelconques dans le graphe, il manque toujours au moins une arête entre deux de ces trois sommets. On a alors $P \geq 4$ et la borne sur le nombre d'arêtes devient donc encore plus petite.

Propriété 4

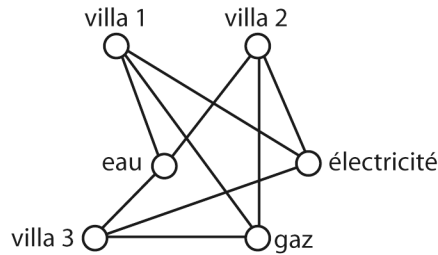
Tout graphe planaire connexe avec S sommets et sans triangle contient au plus $2(S-2)$ arêtes.

Preuve

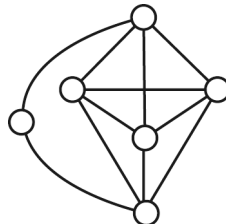
La preuve est similaire à la précédente. Étant donné un graphe planaire G connexe avec S sommets, A arêtes et sans triangle, on peut considérer une représentation planaire topologique R de G dans laquelle les arêtes ne se croisent pas. Le graphe R a le même nombre de sommets et d'arêtes que G et ne comporte pas de triangle. Le plus petit nombre P d'arêtes sur le pourtour d'une face de R vaut donc au moins 4.

La propriété 2 valable pour tout P nous montre donc que $2(S-2) \geq \frac{P}{P-2}(S-2) \geq A$. \square

C'est en utilisant cette propriété que Manori réussit à démontrer que le graphe ci-dessous, correspondant aux connexions des villas à l'eau, au gaz et à l'électricité, n'est pas planaire. En effet, ce graphe ne comporte pas de triangle et on a $2(S-2)=8$ alors que $A=9$.



On remarque donc qu'il est parfois facile de montrer qu'un graphe n'est pas planaire. Ce n'est par contre pas toujours le cas. Dans l'exemple ci-dessous, on a $S=6$ sommet, $A=11$ arêtes et le graphe contient des triangles. On sait donc que si ce graphe est planaire, alors $3(S-2) \geq A$. Dans notre cas, $3(S-2) = 12 > A$. Ce graphe pourrait donc théoriquement être planaire, mais il ne l'est pas car il est impossible de le dessiner en évitant tous les croisements d'arêtes.



La propriété 2 permet de démontrer de nombreux autres résultats. Par exemple, on peut montrer que tout graphe planaire contient au moins un sommet de degré au plus 5.

Propriété 5

Tout graphe planaire contient au moins un sommet de degré au plus 5.

Preuve

Soit G un graphe planaire. Soit G' une composante connexe de G (remarquons que $G'=G$ si G est connexe). En notant S et A les nombres de sommets et d'arêtes de G' , nous savons par la propriété 3 que $3(S-2) \geq A$, ce qui peut se réécrire

$$3S \geq A+6 \quad (*)$$

Faisons un raisonnement par contradiction. Supposons donc que tous les sommets de G (et donc aussi de G') sont de degré au moins 6 et montrons que nous obtenons nécessairement quelque chose d'absurde. Nous supposons donc que la somme des degrés des sommets de G' vaut au moins $6S$.

On a déjà constaté que la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes. On a donc $2A \geq 6S$, c'est-à-dire

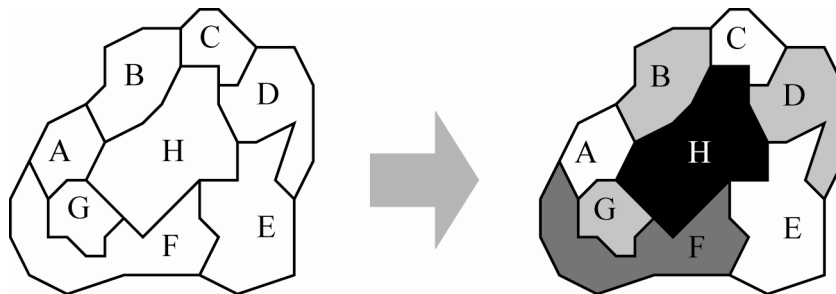
$$A \geq 3S \quad (**)$$

En regroupant les deux inégalités (*) et (**) on obtient donc $A \geq A+6$, ce qui est bien entendu impossible. \square

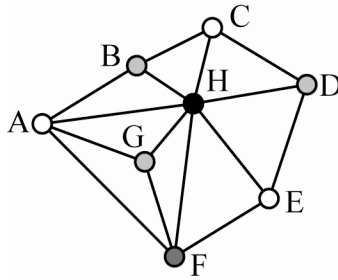
Considérons à nouveau le graphe du chapitre précédent dans lequel on a un sommet par participant à COPS et une arête entre deux participants lorsque ceux-ci ont déjà travaillé ensemble. Si les organisateurs de COPS définissent finalement leurs groupes de travail de telle sorte que chaque participant a travaillé dans le passé avec exactement 6 autres personnes du groupe, alors on sait que le graphe associé à un groupe n'est pas planaire puisque tous les sommets sont de degré 6.

Les graphes planaires ont été popularisés par l'écossais Francis Guthrie qui, en 1852, s'est demandé s'il est possible de colorer toutes les cartes de géographie à l'aide de quatre couleurs uniquement, sans que deux pays ayant une frontière commune aient la même couleur. En représentant chaque pays par un sommet et en reliant deux sommets par une arête si et seulement si les deux pays représentés par ces sommets ont une frontière commune, on obtient un graphe planaire. Francis Guthrie a donc voulu savoir s'il est toujours possible de colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant uniquement 4 couleurs, avec comme unique contrainte que les extrémités de chaque arête doivent être de couleur différente (ce qui est équivalent à demander que les pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes).

Voici à titre d'illustration, une coloration en quatre couleurs d'une carte de géographie imaginaire.



Le graphe suivant représente cette coloration.



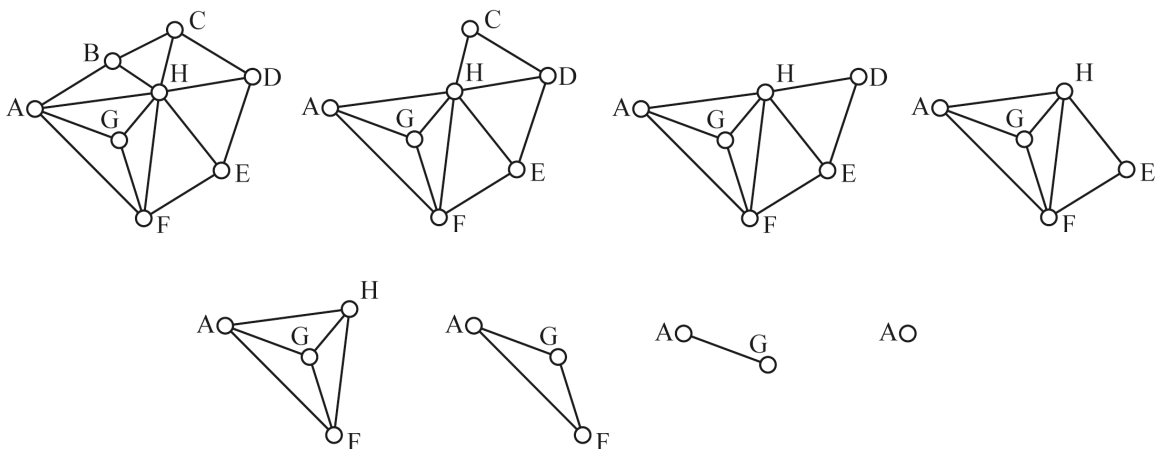
Il est facile de colorer n'importe quel graphe planaire G en utilisant au maximum 6 couleurs (au lieu de 4), avec comme unique contrainte que les extrémités de chaque arête doivent être de couleur différente. Pour ce faire, on peut tout d'abord ordonner les sommets de la manière suivante (où S représente le nombre de sommet du graphe G).

- Considérer le graphe $G'=G$ et initialiser un compteur c à 0
- Tant que G' n'est pas vide faire
 - Choisir un sommet de plus petit degré dans G' et le mettre en position $S-c$;
 - Ôter ce sommet de G' et incrémenter le compteur d'une unité

À titre d'illustration, pour le graphe ci-dessus, on peut choisir à la première étape B, C, D, E ou G puisqu'ils sont tous de degré minimum 3. Choisissons B qui est ainsi mis en 8^e position.

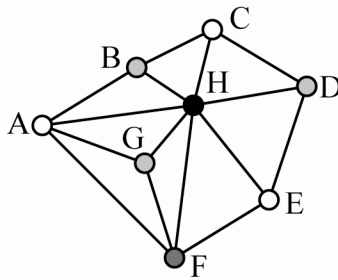
Dans le nouveau graphe obtenu en supprimant B, seul C est de degré minimum 2. On le met donc en 7^e position. C'est ensuite au tour de D d'être mis en 6^e position, puis E en 5^e position. Il reste alors 4 sommets de degré 3. On peut par exemple choisir de mettre le sommet H en 4^e position, puis F en 3^e position, G en 2^e et finalement A en 1^{ère}. On obtient donc une liste contenant A,G,F,H,E,D,C,B dans cet ordre.

Ce processus est illustré ci-dessous.



On peut alors colorer les sommets du graphe dans l'ordre défini par cette liste. Par construction, à chaque fois qu'on colore un sommet, celui-ci est de degré minimum dans le graphe constitué des sommets déjà colorés. Étant donné que G est planaire on sait par la propriété 5 que ce degré est nécessairement inférieur à 6. En d'autres termes, quand on colore un sommet, ce dernier est relié à au plus 5 sommets déjà colorés. Il existe donc toujours une des 6 couleurs de disponible.

Par exemple, si on décide de toujours utiliser la couleur blanche quand c'est possible, le gris clair en deuxième choix, le gris foncé en troisième et le noir en quatrième, en colorant les sommets dans l'ordre A, G, F, H, E, D, C, B , on va commencer par attribuer la couleur blanche à A ; puis G se verra attribué le gris clair, F le gris foncé et H le noir; lorsque vient le tour du sommet E , il peut recevoir la couleur blanche ou le gris clair et on lui attribue donc de préférence le blanc. On poursuit ainsi de suite pour finalement obtenir la coloration déjà montrée plus haut.



Il est un peu plus difficile (mais pas trop) de colorer un graphe planaire avec uniquement 5 couleurs au plus. Par contre, ce n'est que depuis 1976 que l'on sait, grâce à Kenneth Appel et Wolfgang Haken que quatre couleurs sont toujours suffisantes. Mais là, ça devient assez compliqué à mettre en œuvre.