Notations asymptotiques

Définition

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

$O(f(n)) = \{ t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \mid \exists c \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } t(n) \le c\, f(n)\ \forall n \ge n_0 \}$

Si $t \in O(f(n))$, on dit que $t(n)$ est **de l'ordre de** $f(n)$. On note également $t(n) \in O(f(n))$

Exemple

$n^3+3n^2 \le n^3+n^3 = 2n^3 \quad \forall n \ge 3$

On en déduit (en posant $n_0=3$ et $c=2$) que $n^3+3n^2 \in O(n^3)$.

Propriété

Soit A un algorithme, soit $t_1(n)$ le temps pris par A pour résoudre une instance de taille n sur un ordinateur, et soit $t_2(n)$ le temps pris par le même algorithme sur la même instance sur un ordinateur k fois plus rapide.

Alors $O(t_1(n)) = O(t_2(n))$

Preuve

- Montrons tout d'abord que $O(t_1(n)) \subseteq O(t_2(n))$

  Soit $f(n) \in O(t_1(n))$. On sait qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \le c\, t_1(n)\ \forall n \ge n_0$.

  Comme $t_1(n)=kt_2(n)$, on a $f(n) \le (ck)\, t_2(n)\ \forall n \ge n_0$, ce qui veut dire que $f(n) \in O(t_2(n))$.
- Montrons que $O(t_2(n)) \subseteq O(t_1(n))$

  Soit $f(n) \in O(t_2(n))$. On sait qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \le c\, t_2(n)\ \forall n \ge n_0$.

  Comme $t_1(n)=kt_2(n)$, on a $f(n) \le (c/k)\, t_1(n)\ \forall n \ge n_0$, ce qui veut dire que $f(n) \in O(t_1(n))$.

Propriété

Si $f(n) \in O(g(n))$ et $g(n) \in O(h(n))$, alors $f(n) \in O(h(n))$.

Preuve

Il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \le c\, g(n)\ \forall n \ge n_0$. Il existe $c' \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0' \in \mathbb{N}$ tel que $g(n) \le c'\, h(n)\ \forall n \ge n_0'$.

On déduit que $f(n) \le c\, g(n) \le cc'\, h(n)\ \ \forall n \ge \max\{n_0, n_0'\}$, et donc que $f(n) \in O(h(n))$.

Propriété

Soit k un entier et soient $f_1, f_2, \ldots, f_k$ des fonctions de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}_+$.

Alors $O(\sum_{i=1}^{k} f_i(n)) = O(\max_{i=1}^{k}(f_i(n)))$.

Preuve

- Montrons tout d'abord que $O(\sum_{i=1}^{k} f_i(n)) \subseteq O(\max_{i=1}^{k}(f_i(n)))$.

  Soit $t(n) \in O(\sum_{i=1}^{k} f_i(n))$. On sait qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t(n) \le c \sum_{i=1}^{k} f_i(n)\ \ \forall n \ge n_0$.

  On a donc $t(n) \le ck\ \max_{i=1}^{k}(f_i(n))\ \forall n \ge n_0$, ce qui signifie que $t(n) \in \max_{i=1}^{k}(f_i(n))$.
- Montrons que $O(\max_{i=1}^{k}(f_i(n))) \subseteq O(\sum_{i=1}^{k} f_i(n))$.

  Soit $t(n) \in O(\max_{i=1}^{k}(f_i(n)))$. Il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t(n) \le c\ \max_{i=1}^{k}(f_i(n))\ \ \forall n \ge n_0$.

  On a donc $t(n) \le c \sum_{i=1}^{k} f_i(n)\ \forall n \ge n_0$, ce qui signifie que $t(n) \in \sum_{i=1}^{k} f_i(n)$.

Cherchez l'erreur

Il n'existe pas de constantes c et n_0 tel que $n^2 \le cn\ \forall n \ge n_0$, d'où on déduit que $n^2 \notin O(n)$. Cependant :

- $n=n^2+(n-n^2) \Rightarrow O(n)=O(n^2+(n-n^2))=O(\max\{n^2, (n-n^2)\})=O(n^2)$
- $1+2+3+...+n=n(n+1)/2 \Rightarrow O(1+2+3+...+n)=O(n(n+1)/2)$

  Mais $O(1+2+3+...+n)=O(\max\{1,2,3,\ldots,n\})=O(n)$ et

  $O(n(n+1)/2)=O(n^2/2 + n/2)=O(\max\{ n^2/2, n/2\}=O(n^2/2)=O(n^2)$.

Définitions

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$

$\Omega(f(n))=\{ t:\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \mid \exists c \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } t(n) \geq c\, f(n)\ \forall n \geq n_0 \}$

$\theta(f(n))=\{ t:\mathbb{N} \to \mathbb{R}_+ \mid \exists c_1,c_2 \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } c_1\, f(n) \leq t(n) \leq c_2\, f(n)\ \forall n \geq n_0 \}$

Si $t(n) \in \theta(f(n))$, on dit que t(n) est **de l'ordre exact de** f(n).

Propriété

$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n))$

Preuve

$$\begin{aligned} f(n) \in O(g(n)) &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } f(n) \leq c\, g(n)\ \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}_+^* \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } g(n) \geq 1/c\, f(n)\ \forall n \geq n_0 \\ &\Leftrightarrow g(n) \in \Omega(f(n)) \end{aligned}$$

Remarque

Soit A un algorithme permettant de résoudre un problème P.
Soit t(n) le pire temps de calcul de A pour une instance de taille n.
Soit I une instance particulière de taille n et soit T le temps de calcul de A pour I.

- Si $t(n) \in O(f(n))$ alors $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t(n) \leq c\, f(n)\ \forall n \geq n_0$

  Comme $T \leq t(n)$, on déduit que $T \leq c\, f(n)\ \forall n \geq n_0$.
- Si $t(n) \in \Omega(f(n))$ alors $\exists c \in \mathbb{R}_+^*$ et $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $t(n) \geq c\, f(n)\ \forall n \geq n_0$

  Cependant, il se peut que $T < c\, f(n)\ \forall n$. En effet :
  - Si $n < n_0$, alors il se peut que $T \leq t(n) < c\, f(n)$
  - Si $n \geq n_0$ alors il se peut que $T < c\, f(n) \leq t(n)$

Propriété

$\sum_{i=1}^{n} i^k \in \theta(n^{k+1})$

Exemple d'utilisation de la propriété

L'algorithme suivant fait $O(n^2)$ opérations élémentaires

```
Pour i=1 à n faire
    Pour j=1 à i faire
        Une opération élémentaire
```

En effet, le nombre d'opération élémentaires est $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} 1 = \sum_{i=1}^{n} i \in O(n^2)$

Propriété

Soient $k,b,c,d \in \mathbb{R}_+$ avec $b>1$, et soit f(n) une fonction vérifiant la relation suivante : $f(n) - k\, f(n/b) = c\, n^d$

Alors
$$f(n) \in \begin{cases} \theta(n^{\log_b k}) & \text{si } k > b^d \\ \theta(n^d \log_b n) & \text{si } k = b^d \\ \theta(n^d) & \text{si } k < b^d \end{cases}$$

Remarque

Soient A_1 et A_2 deux algorithmes permettant de résoudre un même problème et soient $t_1(n)$ et $t_2(n)$ leur pire temps respectif sur des instances de taille n.
Si $t_1(n) \in O(n^a)$ et $t_2(n) \in O(n^b)$ avec $a<b$, il n'est pas forcément préférable d'utiliser A_1.
Par exemple, si $t_1(n)=n^2$ minutes et $t_2(n)=n^3$ secondes, alors il est préférable d'utiliser A_1 uniquement à partir de $n=60$. Mais dans un tel cas, $t_1(n)=t_2(n)=$ 2½ jours.

Définition

Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ est **éventuellement non-décroissante** si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) \leq f(n+1)$ $\forall n \geq n_0$

Définition

Soit $b \geq 2$ un entier. Une fonction f est **b-harmonieuse** si en plus d'être éventuellement non-décroissante, elle satisfait la condition $f(bn) \in O(f(n))$.

Une fonction est **harmonieuse** si elle est b-harmonieuse pour tout entier $b \geq 2$

En d'autres termes, une fonction f est b-harmonieuse s'il $\exists$ c et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f(bn) \leq cf(n)$ $\forall n \geq n_0$.
Beaucoup de fonctions sont harmonieuses, tel que log n, n log n, n^2, tout polynôme dont le coefficient devant le terme de plus grand degré est positif.

Il existe des fonctions f non harmonieuses car le rapport $\frac{f(bn)}{f(n)}$ est non borné. C'est le cas par exemple de $n^{\log n}$.

En effet, $(2n)^{\log(2n)} = 2^{\log(2n)} n^{\log(2n)} = 2n\, n^{(1+\log n)} = 2n^2 n^{\log n}$.

Propriété (sans démonstration)

Soit f une fonction bornée supérieurement par un polynôme :

- si f est éventuellement non-décroissante, alors il y a de fortes chances pour que f soit harmonieuse
- sinon, il y a de fortes chances pour qu'il existe une fonction g harmonieuse telle que $f(n) \in \theta(g(n))$.

Exemple

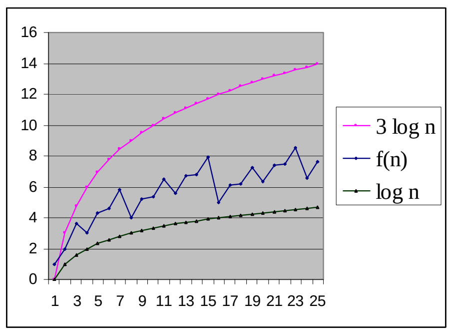
Soit b(n) la fonction qui compte le nombre de 1 dans la représentation binaire de n. À titre d'illustration, b(13)=3 car 13=1101. Soit f(n)=b(n)+log n. Cette fonction n'est pas éventuellement non-décroissante.
En effet :

$$f(2^k-1)=k+\log(2^k-1) > k+(k-1)=2k-1 \geq k+1 = f(2^k)\ \forall k \geq 2.$$

La fonction f n'est donc pas harmonieuse. Cependant :
- $f(n) \geq \log n$ $\forall n$ car b(n) est une fonction strictement positive
- $f(n) < 3 \log n$ $\forall n \geq 2$ car $b(n) < (\log n) + 1 \leq 2 \log n$ $\forall n \geq 2$

On en déduit que $f(n) \in \theta(\log n)$.

Remarquons que log n est une fonction harmonieuse car
- log n est une fonction strictement non-décroissante et
- $\frac{\log(bn)}{\log n} \leq \frac{\log(n^2)}{\log n} = 2 \quad \forall n \geq b$



Propriété

S'il existe un entier $b \geq 2$ tel que f est b-harmonieuse, alors f est harmonieuse

Preuve

Soit $a \geq 2$ un entier. Il faut montrer que f est a-harmonieuse. Soit c une constante et n_0 un entier suffisamment grand tel que

- $f(bn) \leq cf(n)$ $\forall n \geq n_0$ (1)
- $f(n) \leq f(n+1)$ $\forall n \geq n_0$ (2)

Soit $i = \lceil \log_b a \rceil$. On a donc $a \leq b^i$.
Pour $n \geq n_0$, on a $b^i n \geq a n \geq n_0$, et donc
- $f(a\, n) \leq f(b^i n)$ par (2)
- $f(b^i n) \leq cf(b^{i-1} n) \leq \ldots \leq c^i f(n)$ par (1)

On a donc $f(a\, n) \leq c' f(n)$ $\forall n \geq n_0$ (avec $c'=c^i$), ce qui signifie que f est a-harmonieuse.

Définition

Soit $f : N \rightarrow IR_+$ une fonction et soit $P : IN \rightarrow \{vrai, faux\}$ une propriété.

$O(f(n) \mid P(n))=\{t : IN \rightarrow IR_+ \mid \exists c \in IR_+^* \text{ et } \exists n_0 \in IN \text{ tel que } [n \geq n_0 \text{ et } P(n)] \Rightarrow t(n) \leq c\, f(n)\}$

Si $t \in O(f(n) \mid P(n))$, on dit que $t(n)$ est **de l'ordre de f(n) lorsque n vérifie la propriété P**.
On définit $\Omega(f(n) \mid P(n))$ et $\theta(f(n) \mid P(n))$ de manière similaire

Propriété

Soit f une fonction harmonieuse, soit t une fonction éventuellement non-décroissante, et soit $b \geq 2$ un entier :

- $t(n) \in O(f(n) \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=b^k) \Rightarrow t(n) \in O(f(n))$, et
- $t(n) \in \Omega(f(n) \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=b^k) \Rightarrow t(n) \in \Omega(f(n))$

Preuve

Soit n_0 un entier suffisamment grand et c_1,c_2,c_3 des constantes tel que

- $f(n) \leq f(n+1)\ \forall n \geq n_0$ (car f est harmonieuse et donc éventuellement non-décroissante) (1)
- $f(bn) \leq c_1 f(n)\ \forall n \geq n_0$ (car f est harmonieuse et donc b-harmonieuse) (2)
- $t(n) \leq t(n+1)\ \forall n \geq n_0$ (car t est éventuellement non-décroissante) (3)
- $c_2 f(n) \leq t(n)\ \forall n \geq n_0$ tel que $\exists\, k \in IN$ avec $n=b^k$ (si $t(n) \in \Omega(f(n) \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=b^k)$) (4)
- $t(n) \leq c_3 f(n)\ \forall n \geq n_0$ tel que $\exists\, k \in IN$ avec $n=b^k$ (si $t(n) \in O(f(n) \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=b^k)$) (5)

Soit $n \geq \max\{1, bn_0\}$, soit $\underline{n}$ la plus grande puissance de b inférieure ou égale à n, et soit $N=b\underline{n}$. On a $n_0 \leq n/b < \underline{n} \leq n < N$.
Supposons $t(n) \in O(f(n) \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=b^k)$. On a :

$$\begin{aligned} t(n) &\leq t(N) && \text{par (3)} \\ &\leq c_3 f(N) && \text{par (5)} \\ &= c_3 f(b\underline{n}) && \text{par définition} \\ &\leq c_3 c_1 f(\underline{n}) && \text{par (2)} \\ &\leq c_3 c_1 f(n). && \text{par (1)} \end{aligned}$$

Ceci montre que $t(n) \in O(f(n))$.

De même, supposons $t(n) \in \Omega(f(n) \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=b^k)$. On a :

$$\begin{aligned} t(n) &\geq t(\underline{n}) && \text{par (3)} \\ &\geq c_2 f(\underline{n}) && \text{par (4)} \\ &\geq (c_2/c_1)\, f(b\underline{n}) && \text{par (2)} \\ &\geq (c_2/c_1)\, f(N) && \text{par définition} \\ &\geq (c_2/c_1)\, f(n). && \text{par (1)} \end{aligned}$$

Ceci montre que $t(n) \in \Omega(f(n))$.

Exemple d'utilisation de la propriété

Supposons que $t(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ 4t\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + bn & \text{sinon} \end{cases}$

Il est facile de montrer que $t(n)=(a+b)n^2 - bn$ si n est une puissance de 2.
On en déduit que $t(n) \in \theta(n^2 \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=2^k)$.
La propriété ci-dessus permet de conclure que $t(n) \in \theta(n^2)$

Définition

Une fonction f est **au moins quadratique** si $f \in \Omega(n^2)$. Elle est **fortement quadratique** si elle est éventuellement non-décroissante, et s'il existe $n_0 \in IN$ tel que $f(bn) \geq b^2 f(n)\ \forall b \in IN$ et $\forall n \geq n_0$

Propriété Si f est fortement quadratique, alors elle est au moins quadratique.

Preuve

Soit n_0 un entier suffisamment grand tel que $f(n) \leq f(n+1)$ et $f(bn) \geq b^2 f(n)\ \forall b \in IN$ et $\forall n \geq n_0$.
Soit n_1 la plus petite puissance de 2 supérieure ou égale à n_0 et soit $c=f(n_1)/n_1^2$. On a $f(n_1)=cn_1^2$.
Par récurrence, $f(n) \geq cn^2\ \ \forall n \geq n_1$ qui est une puissance de 2. En effet : $f(n)=f(2(n/2)) \geq 4f(n/2) \geq 4c(n/2)^2 = cn^2$.
Comme n^2 est une fonction harmonieuse et $f(n) \in \Omega(n^2 \mid \exists\, k \in IN \text{ tel que } n=2^k)$, on déduit de la propriété précédente que $f(n) \in \Omega(n^2)$.